

POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA
KATEDRA INŻYNIERII KOMPUTEROWEJ

PRACA DOKTORSKA

**SYSTEMY ROZMYTO-NEURONOWE REALIZUJĄCE
RÓŻNE SPOSOBY ROZMYTEGO WNIOSKOWANIA**

Robert Nowicki

Promotor:

dr hab. inż. Danuta Rutkowska, prof. nadzw. P.Cz.

Częstochowa 1999

Niniejszym chciałbym podziękować Pani promotor, Profesor Danucie Rutkowskiej za czas poświęcony na długie dyskusje, cenne uwagi i pomoc, które przyczyniły się do powstania tej pracy. Równie gorąco chciałbym podziękować kierownikowi Katedry Inżynierii Komputerowej Profesorowi Leszkowi Rutkowskiemu za niemniej cenne uwagi, życzliwość i wsparcie.

SPIS TREŚCI

TERMINOLOGIA I OZNACZENIA	6
1 WSTĘP	8
CEL PRACY	9
TEZA PRACY	9
2 ROZMYTE SYSTEMY WNIOSKUJĄCE	10
2.1 ZBIORY ROZMYTE	10
2.1.1 <i>Ogólne pojęcie zbioru rozmytego</i>	10
2.1.2 <i>Zbiory rozmyte w przestrzeni R^1</i>	11
2.1.3 <i>Zbiory rozmyte w przestrzeni R^n</i>	16
2.2 WYBRANE OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH	18
2.2.1 <i>Wybrane pojęcia z teorii zbiorów rozmytych</i>	18
2.2.2 <i>Normy trójkątne</i>	19
2.2.3 <i>Podstawowe operacje na zbiorach rozmytych</i>	25
2.2.4 <i>Relacje rozmyte</i>	27
2.3 PRZYBLIŻONE WNIOSKOWANIE	29
2.3.1 <i>Podstawowy schemat wnioskowania</i>	29
2.3.2 <i>Reguły wnioskowania dla modelu konstruktywnego</i>	31
2.3.3 <i>Reguły wnioskowania dla modelu destrukcyjnego</i>	34
3 REALIZACJA ROZMYTYCH SYSTEMÓW WNIOSKUJĄCYCH ZA POMOCĄ STRUKTUR SIECIOWYCH	48
3.1 SYSTEMY ROZMYTO-NEURONOWE	48
3.2 STRUKTURY O MODELACH LINGWISTYCZNYCH TYPU MAMDANIEGO	49
3.2.1 <i>Reguła Mamdaniego</i>	49
3.2.2 <i>Reguła Larsena</i>	51
3.3 STRUKTURY O MODELACH LINGWISTYCZNYCH TYPU LOGICZNEGO	52
3.3.1 <i>Reguła binarna (Kleenego-Dienes, Dienes-Reschera)</i>	52
3.3.2 <i>Reguła Łukasiewicza</i>	54
3.3.3 <i>Reguła typu max-min (Zadeha)</i>	55
3.3.4 <i>Reguła probabilistyczna</i>	57

3.3.5	<i>Reguła Willmotta</i>	58
3.3.6	<i>Reguła ograniczonej sumy</i>	59
3.3.7	<i>Reguła Goguena</i>	61
3.3.8	<i>Reguła Sharpa</i>	63
3.3.9	<i>Reguła Gödela</i>	65
3.3.10	<i>Reguła Yagera</i>	66
3.4	STRUKTURY ROZSZERZONE	68
3.4.1	<i>Reguła Mamdaniego</i>	68
3.4.2	<i>Reguła Larsena</i>	70
3.4.3	<i>Reguła binarna</i>	71
3.4.4	<i>Reguła Łukasiewicza</i>	72
3.4.5	<i>Reguła Zadeha</i>	74
3.4.6	<i>Reguła probababilistyczna</i>	75
3.4.7	<i>Reguła Willmotta</i>	77
3.4.8	<i>Reguła ograniczonej sumy</i>	78
3.4.9	<i>Reguła Goguena</i>	80
3.4.10	<i>Reguła Sharpa</i>	81
3.4.11	<i>Reguła Gödela</i>	83
3.4.12	<i>Reguła Yagera</i>	84
3.5	STRUKTURY DLA PRZYPADKU NIEZALEŻNYCH ZMIENNYCH LINGWISTYCZNYCH	86
3.5.1	<i>Struktura z regułą wnioskowania Larsena i Mamdaniego</i>	86
3.5.2	<i>Struktury z regułą wnioskowania binarną, Łukasiewicza i stochastyczną</i>	87
3.5.3	<i>Struktury z regułą wnioskowania Zadeha i Willmotta</i>	88
3.5.4	<i>Struktury z regułą wnioskowania ograniczonej sumy</i>	89
4	MODYFIKACJE SYSTEMÓW ROZMYTO-NEURONOWYCH	91
4.1	UPROSZCZENIE REALIZACJI ZBIORÓW ROZMYTYCH POPRZEDNIKÓW REGUŁ	91
4.2	STRUKTURY Z ROZBUDOWANYMI POPRZEDNIKAMI REGUŁ	96
4.3	STRUKTURY Z NIEPEŁNYMI REGUŁAMI	99
4.4	STRUKTURY Z SIECIĄ NEURONOWĄ REALIZUJĄCĄ WYOSTRZANIE	107
4.5	ROZMYWANIE TYPU NON-SINGLETON	108
4.6	ŁĄCZENIE MODYFIKACJI	114
4.7	SPOSTRZEŻENIE	116
5	USTALANIE PARAMETRÓW SYSTEMÓW ROZMYTO-NEURONOWYCH	118

5.1	PARAMETRY SYSTEMÓW ROZMYTO-NEURONOWYCH	118
5.2	GRADIENTOWA METODA UCZENIA	119
5.3	ALGORYTMY GENETYCZNE	130
5.4	GRUPOWANIE DANYCH.....	132
6	ANALIZA DZIAŁANIA SYSTEMÓW W WYBRANYCH SYTUACJACH	134
6.1	PRZYPADEK OGÓLNY	134
6.2	PRZYPADEK PUNKTÓW Z ZEROWĄ PRZYNALEŻNOŚCIĄ	140
7	BADANIA EKSPERYMENTALNE	145
7.1	ZADANIE KLASYFIKACJI.....	145
7.2	WSPOMAGANIE DIAGNOSTYKI MEDYCZNEJ.....	155
7.3	PARKOWANIE DWUOSIOWEGO POJAZDU MECHANICZNEGO	157
8	PODSUMOWANIE.....	161
	LITERATURA.....	164

TERMINOLOGIA I OZNACZENIA

$\mathbf{X}, \mathbf{X}_i$ - przestrzeń rozważań; zwykle dotyczy danych wejściowych,

$\mathbf{Y}$ - przestrzeń; zwykle dotyczy danych wynikowych (wyjściowych),

$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ - zmienna lingwistyczna; w przypadku wielowymiarowej przestrzeni $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

$x \in \mathbf{X}, x_i \in \mathbf{X}_i$ - zmienne lingwistyczne w przypadku jednowymiarowych przestrzeni $\mathbf{X}, \mathbf{X}_i$,

$y \in \mathbf{Y}$ - zmienna lingwistyczna,

$y \in \mathbf{Y}$ - zmienna lingwistyczna w przypadku jednowymiarowej przestrzeni $\mathbf{Y}$,

$\bar{x}, \bar{x}_i$ - wartość rzeczywista (nie rozmyta) zmiennej x lub x_i ,

$\bar{\mathbf{x}}$ - wartość nie rozmyta zmiennej lingwistycznej $\mathbf{x}$; w przypadku wielowymiarowej

$$\text{przestrzeni } \mathbf{X}, \bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$$

$\bar{y}$ - wartość rzeczywista (nie rozmyta) zmiennej y ,

$A \subseteq \mathbf{X}, B \subseteq \mathbf{Y}$ - zbiory rozmyte,

A' - zbiór rozmyty, powstały w wyniku rozmycia wartości $\bar{x}$,

B' - zbiór rozmyty będący wynikiem procesu wnioskowania,

B'^k - zbiór rozmyty będący wynikiem wnioskowania na podstawie reguły R^k ,

$\mu_A(\mathbf{x})$ - funkcja przynależności zbioru rozmytego A ,

n - liczba zmiennych wejściowych i odpowiadających im zmiennych lingwistycznych,

N - ilość reguł zdefiniowanych w systemie rozmytym,

$i = 1 \dots n$ - indeks wskazujący numer wejścia oraz odpowiadającą mu zmienną lingwistyczną,

$k = 1 \dots N$ - indeks wskazujący numer reguły,

$\bar{y}^k$ - wartość zmiennej y , dla której funkcja przynależności zbioru rozmytego B^k osiąga maksimum,

$A \cup B$ - suma zbiorów rozmytych A i B ,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i - \text{suma } n \text{ zbiorów rozmytych,}$$

$A \cap B$ - przecięcie zbiorów rozmytych A i B ,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i - \text{przecięcie } n \text{ zbiorów rozmytych,}$$

$\sim A$ - dopełnienie zbioru rozmytego A ,

$A \times B$ - iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych A i B ,

$R \circ S$ - złożenie zbiorów rozmytych (relacji rozmytych) R i S ,

$T(a, b) = a *^T b$ - T -norma argumentów a i b ,

$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 *^T a_2 *^T \dots *^T a_n = \bigwedge_{i=1}^n a_i$ - T -norma n argumentów,

$S(a, b) = a *^S b$ - S -norma argumentów a i b ,

$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 *^S a_2 *^S \dots *^S a_n = \bigvee_{i=1}^n a_i$ - S -norma n argumentów,

$a \cdot b$ - iloczyn algebraiczny argumentów a i b ,

$\prod_{i=1}^n a_i$ - iloczyn algebraiczny n argumentów,

$a + b$ - suma algebraiczna argumentów a i b ,

$\sum_{i=1}^n a_i$ - suma algebraiczna n argumentów,

$\min(a, b)$ - operacja minimum argumentów a i b ,

$\min_{i=1..n} \{a_i\}$ - operacja minimum n argumentów,

$\max(a, b)$ - operacja maksimum argumentów a i b ,

$\max_{i=1..n} \{a_i\}$ - operacja maksimum n argumentów,

$\frac{\mu_A(\mathbf{x}_1)}{\mathbf{x}_1} + \frac{\mu_A(\mathbf{x}_2)}{\mathbf{x}_2}$ - symboliczny zapis zbioru rozmytego o dwóch elementach,

$\sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(\mathbf{x}_i)}{\mathbf{x}_i}$ - symboliczny zapis zbioru rozmytego o n elementach,

$\int_{\mathbf{x}} \frac{\mu_A(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}$ - symboliczny zapis zbioru rozmytego o nieskończonej liczbie elementów,

$a \overset{=}{*} b$ - operator, dla którego $a \overset{=}{*} b = 1$ jeżeli $a = b$ lub 0 w przeciwnym przypadku,

$a \overset{\approx}{*} b$ - operator, dla którego $a \overset{\approx}{*} b = 1$ jeżeli $|a - b| < \varepsilon$ lub 0 w przeciwnym przypadku,

$a \overset{\leq}{*} b$ - operator, dla którego $a \overset{\leq}{*} b = 1$ jeżeli $a \leq b$ lub 0 w przeciwnym przypadku.

1 WSTĘP

Systemy rozmyto-neuronowe są efektem połączenia dwóch nurtów sztucznej inteligencji, sieci neuronowych oraz rozmytych systemów wnioskujących. Łącząc cechy jednych i drugich, wkraczają one w coraz szersze obszary zastosowań.

Sieci neuronowe [61], [27], [21], [41], [42], [69] składają się z prostych elementów (neuronów) przetwarzających niezależnie informację przekazywaną z warstwy na warstwę. Niezwykle istotną ich cechą wynikającą z tego faktu jest możliwość ich realizacji w postaci systemów równoległych [7]. Pozwala to na uzyskiwanie dużej mocy obliczeniowej. Ich możliwości w zakresie przetwarzania i rozpoznawania obrazów, analizy dźwięku, analiz ekonomicznych i marketingowych oraz innych zostały niejednokrotnie potwierdzone. Nie mniej ważna jest, charakterystyczna dla sieci neuronowych, możliwość doboru ich parametrów w procesie zwanym uczeniem. W literaturze m.in. [48], [47], [22], [6], znaleźć można opisy wielu metod jego przeprowadzenia. Niestety w typowych sieciach neuronowych wiedza uzyskana w trakcie uczenia jest rozproszona w całej ich strukturze, zatem trudna do analizowania.

Wady tej nie posiadają systemy wnioskujące oparte o logikę rozmytą [68], [9], [20], [44]. Bazują one na regułach opisanych w sposób czytelny dla obserwatora czy projektanta, w postaci JEŻELI... TO.... Reguły te zwykle są definiowane przez eksperta w trakcie projektowania systemu. Pojęcia używane w opisie reguł mają często charakter potoczny, nieprecyzyjny, jak np. duży, wysoki, płytki. Zawsze jednak są one formalizowane przez opisujące je zbiory rozmyte [67]. Rozmyte systemy wnioskujące znakomicie sprawdzają się w zakresie sterowania [62], [11], ale także rozpoznawania [4], klasyfikacji [17], [58] i modelowania [66].

Połączenie obu nurtów [31], [30], [49], [50] umożliwiło stworzenie systemów, budowanych z prostych elementów realizujących podstawowe operacje, mogących pracować równolegle, z których wiedza jest łatwo interpretowana jako czytelne reguły. Struktury takie można konstruować jak systemy rozmyte, ale również uczyć podobnie jak sieci neuronowe [32], [33], [34], [46].

W pracach dotyczących przybliżonego wnioskowania [68], [11], [19], [29], [62], [66], [18], [49] przedstawiono kilkadziesiąt rozmaitych definicji rozmytych implikacji. Pomimo to, jak dotychczas w literaturze światowej do konstruowania systemów rozmyto-neuronowych wykorzystywano jedynie definicje Larsena (iloczyn) i Mamdaniego (minimum). Dla tych

definicji wyprowadzono odpowiednie struktury oraz algorytmy ich uczenia [31], [32], [33], [34], [30], [46], [49], [50], jednakże uzyskanych tam rezultatów nie można w sposób bezpośredni przenieść na przypadek innych definicji rozmytych implikacji. Dlatego w tej pracy zostaną wyprowadzone struktury rozmyte i podane algorytmy ich uczenia dla 10 innych definicji rozmytej implikacji (binarnej, Łukasiewicza, Zadeha, probabilistycznej, Willmotta, ograniczonej sumy, Goguena, Sharpa, Gödela i Yagera). Definicje te związane są z tzw. destrukcyjnymi modelami lingwistycznymi [66]. Ze wstępnych prac na temat destrukcyjnych systemów rozmytych [10] wynika, że mogą one posiadać interesujące cechy warte wykorzystania do pewnych zadań. Pierwsze próby konstruowania destrukcyjnych systemów rozmyto-neuronowych [39], [54], [55] potwierdziły te przypuszczenia, pokazując ponadto, że jest możliwe zrealizowanie takich systemów. Wobec tego niniejszej pracy postawiono następujący cel:

Cel pracy

Celem pracy jest zbadanie różnych systemów rozmyto-neuronowych utworzonych przy zastosowaniu tak zwanego destrukcyjnego podejścia do wnioskowania, jak również systemów o innych sposobach rozmytego wnioskowania oraz porównanie działania tych systemów.

Teza pracy

Struktura i działanie systemów rozmyto-neuronowych zależy od przyjętego sposobu rozmytego wnioskowania, w szczególności podejście destrukcyjne w porównaniu z konstruktywnym prowadzi do stworzenia systemów o mniejszej złożoności i podobnym działaniu w pewnej klasie problemów.

2 ROZMYTE SYSTEMY WNIOSKUJĄCE

W kolejnych punktach tego rozdziału przedstawione będą podstawowe informacje na temat zbiorów rozmytych, operacji wykonywanych na tych zbiorach oraz przybliżonego wnioskowania.

2.1 Zbiory rozmyte

Pojęcie zbiorów rozmytych zostało stworzone przez Zadeha w pracy [67] w celu opisanie wielkości mających charakter nieprecyzyjny. Poniżej zostaną przedstawione za pracą [49] podstawowe informacje dotyczące zbiorów rozmytych.

2.1.1 Ogólne pojęcie zbioru rozmytego

Definicja 1

Zbiorem rozmytym A w pewnej (niepustej) przestrzeni $\mathbf{X}$, co zapisujemy jako $A \subseteq \mathbf{X}$, nazywamy zbiór par

$$A = \{(\mathbf{x}, \mu_A(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in \mathbf{X}\} \quad (2.1)$$

gdzie

$$\mu_A : \mathbf{X} \rightarrow [0,1] \quad (2.2)$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A .

W literaturze [11], [49] dla opisu zbiorów rozmytych stosuje się następujący, uproszczony zapis

$$A = \int_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \frac{\mu_A(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \quad (2.3)$$

który dla dyskretnej przestrzeni $\mathbf{X}$ przyjmuje postać

$$A = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \frac{\mu_A(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \quad (2.4)$$

Przykładem może być następujący zbiór rozmyty określający ładnie brzmiące samogłoski

$$A = \frac{0,8}{\text{'a'}} + \frac{0,6}{\text{'e'}} + \frac{0,2}{\text{'i'}} + \frac{0,3}{\text{'o'}} + \frac{0,4}{\text{'u'}} \quad (2.5)$$

Oczywiście przykład ten wyraża indywidualny gust jego autora, i każdy może zdefiniować taki zbiór według własnych upodobań.

Należy podkreślić, że symbol całki i sumy we wzorach (2.3) i (2.4) nie oznaczają tych operacji w tradycyjnym sensie, lecz stanowią elementy zapisu symbolicznego.

Zmienne, które oprócz wartości rzeczywistych (nie rozmytych), mogą przyjmować wartości nieprecyzyjne (rozmyte), opisane przez zbiory rozmyte, nazywać będziemy zmiennymi lingwistycznymi.

2.1.2 Zbiory rozmyte w przestrzeni $\mathbf{R}^1$

Szczególnym przypadkiem są zbiory rozmyte opisane w przestrzeni liczb rzeczywistych ($\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$). Wzór definiujący (2.1) przyjmuje wówczas postać

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in \mathbf{X}\} \quad (2.6)$$

Większość pojęć wykorzystywanych w przybliżonym wnioskowaniu (np. „wysokie stężenie”, „duża odległość”, „niska temperatura”, „umiarkowana jaskrawość”) jest umiejscowiona w rzeczywistej skali rozpatrywanej wielkości (stężenia, odległości, temperatury, czy jaskrawości), dlatego są to najpowszechniej wykorzystywane zbiory rozmyte. Poniżej zostaną przedstawione najczęściej spotykane funkcje przynależności, określone w dziedzinie liczb rzeczywistych.

Singleton

Jest to bardzo szczególna funkcja przynależności. Przyjmuje ona wartość 1 tylko w jednym punkcie przestrzeni rozważań, należącym w pełni do zbioru rozmytego. W pozostałych punktach przyjmuje wartość 0. Definiowana jest ona wzorem

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x = \bar{x} \\ 0 & \text{jeżeli } x \neq \bar{x} \end{cases} \quad (2.7)$$

Taka funkcja przynależności charakteryzuje jednoelementowy zbiór rozmyty. Jedynym elementem, w pełni należącym do zbioru rozmytego A jest punkt $\bar{x}$, który w przypadku przestrzeni $\mathbf{R}^1$ jest liczbą rzeczywistą.

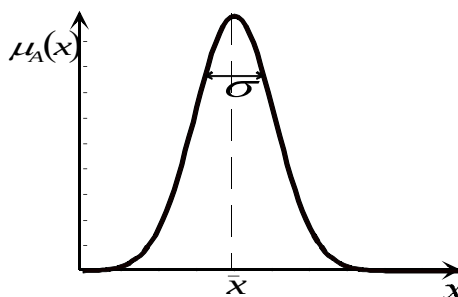
Funkcja przynależności typu *singleton* wykorzystywana jest głównie w operacji wyostrażania, stosowanej w systemach rozmytych (p. 3).

Gaussowska funkcja przynależności

Zdecydowanie najczęściej spotykaną funkcją przynależności jest funkcja gaussowska opisana wzorem

$$\mu_A(x) = \exp\left(-\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) \quad (2.8)$$

gdzie $\bar{x}$ jest środkiem, a σ określa szerokość krzywej gaussowskiej. Rysunek 2.1 przedstawia jej wykres.



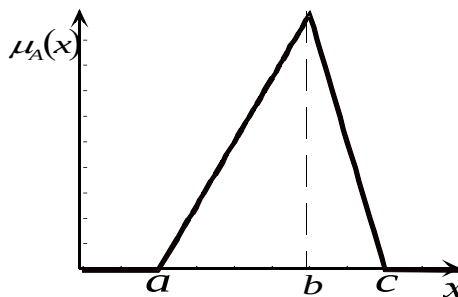
Rys. 2.1. Wykres gaussowskiej funkcji przynależności.

Trójkątna funkcja przynależności (klasy t)

Obok funkcji gaussowskich, często stosowane są trójkątne funkcje przynależności. Funkcje te można zdefiniować na wiele sposobów. Dla przykładu zastanę wymienione dwa z nich. Pierwszy określa trójkątną funkcję przynależności za pomocą następującego wzoru

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq c \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{dla } b \leq x \leq c \end{cases} \quad (2.9)$$

gdzie a , b i c są parametrami spełniającymi warunek $a < b < c$. Rysunek 2.2 przedstawia wykres funkcji przynależności danej wzorem (2.9).

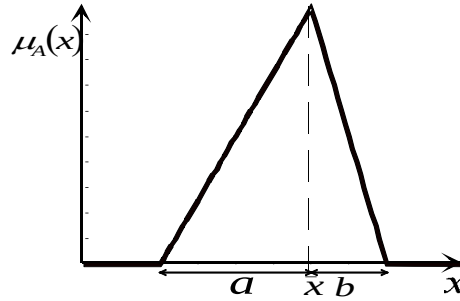


Rys. 2.2. Wykres trójkątnej funkcji przynależności opisanej wzorem (2.9).

Drugi, niekiedy wygodniejszy sposób definiowania trójkątnej funkcji przynależności jest następujący

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq \bar{x} - a \text{ lub } x \geq \bar{x} + b \\ \frac{x - \bar{x} + a}{a} & \text{dla } \bar{x} - a \leq x \leq \bar{x} \\ \frac{\bar{x} - x + b}{b} & \text{dla } \bar{x} \leq x \leq \bar{x} + b \end{cases} \quad (2.10)$$

gdzie $\mu_A(\bar{x}) = 1$ (podobnie jak dla funkcji gaussowskiej), natomiast a i b są parametrami określającymi szerokość trójkąta, przy czym $a, b > 0$. Rysunek 2.3 przedstawia przykładowy wykres funkcji trójkątnej danej wzorem (2.10).



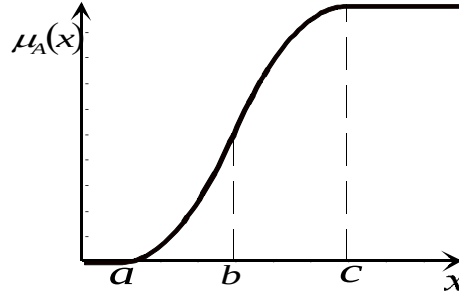
Rys. 2.3. Wykres trójkątnej funkcji przynależności opisanej wzorem (2.10).

Funkcja przynależności klasy s

Może ona być zdefiniowana następująco

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{b-c} \right)^2 & \text{dla } b \leq x \leq c \\ 1 & \text{dla } x \geq c \end{cases} \quad (2.11)$$

gdzie a , b i c są parametrami, których znaczenie widać na rysunku 2.4. Funkcja ta jest ciągła, bez względu na wartość parametrów, natomiast różniczkowalna tylko w przypadku gdy $c - b = b - a$, czyli $b = \frac{a+c}{2}$.



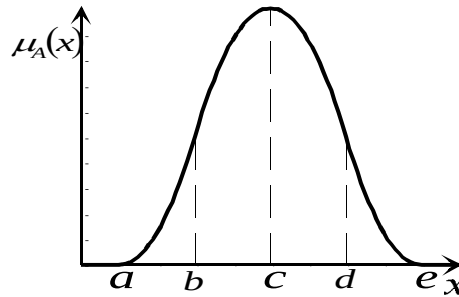
Rys. 2.4. Wykres funkcji przynależności klasy s.

Funkcja przynależności klasy π

Jest ona zbudowana z dwóch funkcji klasy s i można ją zdefiniować jako

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq e \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^2 & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{b-c} \right)^2 & \text{dla } b \leq x \leq c \\ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{d-c} \right)^2 & \text{dla } c \leq x \leq d \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x-e}{d-e} \right)^2 & \text{dla } d \leq x \leq e \end{cases} \quad (2.12)$$

gdzie a , b , c , d i e są parametrami przedstawionymi na rysunku 2.5. Tak zdefiniowana funkcja jest ciągła, ale aby była różniczkowalna wymagane jest by $c-b=b-a$ i $e-d=d-c$, czyli $b = \frac{a+c}{2}$ i $d = \frac{c+e}{2}$.

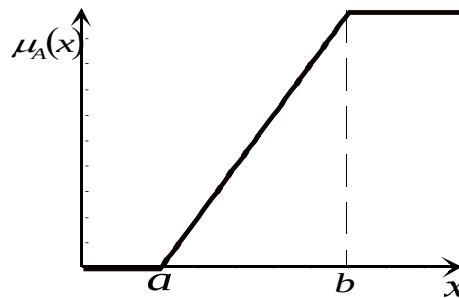
Rys. 2.5. Wykres funkcji przynależności klasy π .

Funkcja przynależności klasy γ

Definiuje się ją następująco

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{dla } x \geq b \end{cases} \quad (2.13)$$

gdzie a i b są parametrami, przedstawionymi na rysunku 2.6.



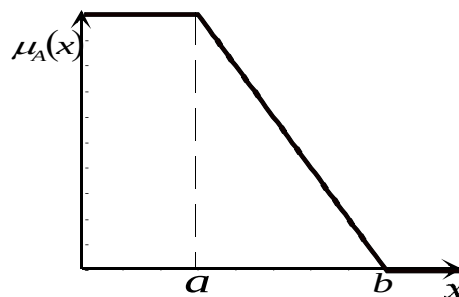
Rys. 2.6. Wykres funkcji przynależności klasy γ .

Funkcja przynależności klasy L

Jest ona definiowana następująco

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{b-x}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x \geq b \end{cases} \quad (2.14)$$

gdzie a i b są parametrami, przedstawionymi na rysunku 2.7.



Rys. 2.7. Wykres funkcji przynależności klasy L .

Wymienione wyżej funkcje przynależności nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości. Funkcji takich można definiować wiele w zależności od potrzeb.

2.1.3 Zbiory rozmyte w przestrzeni $\mathbf{R}^n$

Rozważając zbiór rozmyty A określony w przestrzeni $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}^n$, gdzie $n > 1$, można rozróżnić dwa przypadki. Pierwszy zachodzi, gdy założymy niezależność poszczególnych n zmiennych lingwistycznych, drugi - gdy zmienne te uznamy za zależne. W obu z nich przestrzeń rozważań traktujemy jako iloczyn kartezjański niezależnych, jednowymiarowych przestrzeni rozważań

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n \quad (2.15)$$

W przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych zbiór rozmyty A traktujemy jako iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych A_i określonych na odpowiednich przestrzeniach $\mathbf{X}_i$, co zapisujemy jako

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad (2.16)$$

przy czym każdy ze zbiorów rozmytych A_i może być zdefiniowany za pomocą jednego ze wzorów od (2.7) od (2.14). Funkcja przynależności tak określonego zbioru A jest opisana wzorem

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.17)$$

a jej konkretna postać zależy od przyjętej definicji iloczynu kartezjańskiego.

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych (2.16) definiujemy przez operację minimum

$$\begin{aligned} \mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \min \{ \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n) \} \\ &= \min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i}(x_i) \} \end{aligned} \quad (2.18)$$

lub przez operację iloczynu

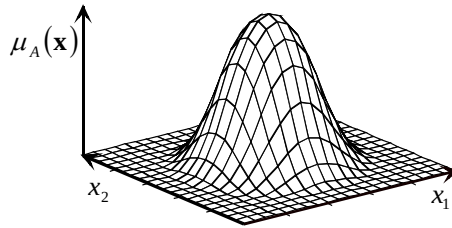
$$\begin{aligned} \mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \mu_{A_1}(x_1) \cdot \mu_{A_2}(x_2) \cdot \dots \cdot \mu_{A_n}(x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Bardziej ogólna definicja iloczynu kartezjańskiego zbiorów rozmytych zostanie przedstawiona w punkcie 2.2.3.

W przypadku zależnych zmiennych lingwistycznych funkcje przynależności definiuje się jako funkcję wektora $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. W pracy [65] przedstawiono wielowymiarową funkcję przynależności klasy Π , którą można wyrazić wzorem

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2 \cdot \left(1 - \frac{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|}{\alpha}\right)^2 & \text{dla } \frac{1}{2}\alpha \leq \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \alpha \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|}{\alpha}\right)^2 & \text{dla } \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \text{dla } \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \geq \alpha \end{cases} \quad (2.20)$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ jest środkiem funkcji przynależności, $\alpha > 0$ parametrem określającym jej rozpiętość. Przykładowy wykres przedstawia rysunek 2.8.

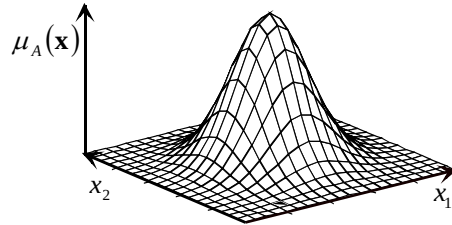


Rys. 2.8. Wykres dwuwymiarowej funkcji przynależności klasy Π .

W artykule [63] użyto funkcję radialną w postaci

$$\mu_A(\mathbf{x}) = e^{-\frac{\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2}{2\sigma^2}} \quad (2.21)$$

Jej przykładowy wykres przedstawia rysunek 2.9.

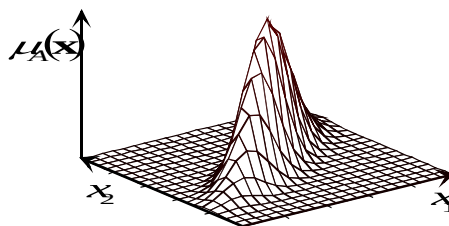


Rys. 2.9. Wykres radialnej funkcji przynależności opisanej wzorem (2.21).

Interesujące właściwości posiada funkcja elipsoidalna wykorzystana m.in. w [1], [2] i [3]. Można ją przedstawić następującym wzorem

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})}{\alpha}\right) \quad (2.22)$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ jest środkiem funkcji przynależności, $\alpha > 0$ parametrem określającym jej rozpiętość, a $\mathbf{Q}$ macierzą kowariancji. Modyfikując tę macierz, można modelować funkcję przynależności w sposób niemożliwy dla funkcji (2.20) i (2.21). Widać to na rysunku 2.10 przedstawiającym jej wykres w przypadku dwuwymiarowym.



Rys. 2.10. Wykres elipsoidalnej funkcji przynależności.

Do realizacji wielowymiarowych funkcji przynależności nadają się także sieci neuronowe. Przykładem może być sterownik rozmyty Takagi-Sugeno przedstawiony w [49], w którym wykorzystano właśnie sieci neuronowe m.in. do wyznaczania stopnia przynależności danych wejściowych do poszczególnych klas.

2.2 Wybrane operacje na zbiorach rozmytych

Omówienie operacji wykonywanych na zbiorach rozmytych poprzedzone będzie opisem wybranych pojęć z teorii zbiorów rozmytych. Zostaną także przedstawione normy trójkątne, wykorzystywane do zdefiniowania niektórych operacji.

2.2.1 Wybrane pojęcia z teorii zbiorów rozmytych

W dalszej części pracy przydatne będą pewne pojęcia dotyczące zbiorów rozmytych. Poniżej zostaną przedstawione ich definicje zaczerpnięte z [49].

Definicja 2

Wysokość zbioru rozmytego A oznaczamy $h(A)$ i określamy jako

$$h(A) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \mu_A(\mathbf{x}) \quad (2.23)$$

Definicja 3

Zbiór rozmyty A nazywamy normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $h(A) = 1$.

Definicja 4

Zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B , co zapisujemy $A = B$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \mu_B(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

dla każdego $\mathbf{x} \in X$.

Definicja 5

Zbiór rozmyty $A \subseteq \mathbf{R}^n$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{R}^n$ i $\lambda \in [0,1]$ zachodzi

$$\mu_A[\lambda \cdot \bar{\mathbf{x}}_1 + (1-\lambda) \cdot \bar{\mathbf{x}}_2] \geq \min\{\mu_A(\bar{\mathbf{x}}_1), \mu_A(\bar{\mathbf{x}}_2)\} \quad (2.25)$$

Punkt $\lambda \cdot \bar{\mathbf{x}}_1 + (1-\lambda) \cdot \bar{\mathbf{x}}_2$ leży na odcinku łączącym punkty $\bar{\mathbf{x}}_1$ i $\bar{\mathbf{x}}_2$ w przestrzeni $\mathbf{R}^n$.

Definicja 6

Zbiór rozmyty $A \subseteq \mathbf{R}^n$ jest wklęsły wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{R}^n$ i $\lambda \in [0,1]$, że zachodzi

$$\mu_A[\lambda \cdot \bar{\mathbf{x}}_1 + (1-\lambda) \cdot \bar{\mathbf{x}}_2] < \min\{\mu_A(\bar{\mathbf{x}}_1), \mu_A(\bar{\mathbf{x}}_2)\} \quad (2.26)$$

2.2.2 Normy trójkątne

Niektóre operacje na zbiorach rozmytych, np. przecięcie i suma (p. 2.2.2) definiowane są za pomocą tzw. norm trójkątnych (T -normy i S -normy). Poniżej zostaną przytoczone za [49] ich definicje.

Definicja 7

Funkcję dwóch zmiennych T

$$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \quad (2.27)$$

nazywamy T -normą, jeżeli jest ona

1) monotoniczna

$$T(a,c) \leq T(b,d) \quad \text{dla} \quad a \leq b \text{ i } c \leq d \quad (2.28)$$

2) przemienne

$$T(a,b) = T(b,a) \quad (2.29)$$

3) łączna

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)) \quad (2.30)$$

4) oraz spełnia warunki brzegowe

$$T(a,0) = 0, \quad T(a,1) = a \quad (2.31)$$

gdzie $a, b, c, d \in [0,1]$.

Dla operacji T -normy argumentów a i b stosuje się też zapis

$$T(a, b) = a \overset{T}{*} b \quad (2.32)$$

Definiuje się również wieloargumentową funkcję T , dla której stosowany będzie zapis

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \overset{T}{*} a_2 \overset{T}{*} \dots \overset{T}{*} a_n = \overset{T}{*}_{i=1}^n a_i \quad (2.33)$$

Wzór (2.33) określa jednoznacznie T -normę dla n argumentów, gdyż funkcja T spełnia warunki (2.29) i (2.30).

Definicja 8

Funkcję dwóch zmiennych S

$$S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \quad (2.34)$$

nazywamy S -normą, jeżeli jest ona

1) monotoniczna

$$S(a, c) \leq S(b, d) \quad \text{dla} \quad a \leq b \text{ i } c \leq d \quad (2.35)$$

2) przemienna

$$S(a, b) = S(b, a) \quad (2.36)$$

3) łączna

$$S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c)) \quad (2.37)$$

4) oraz spełnia warunki brzegowe

$$S(a, 0) = a, \quad S(a, 1) = 1 \quad (2.38)$$

gdzie $a, b, c, d \in [0,1]$.

Dla operacji S -normy argumentów a i b stosuje się też zapis

$$S(a, b) = a \overset{S}{*} b \quad (2.39)$$

Definiuje się również wieloargumentową funkcję S , dla której stosowany będzie zapis

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \overset{S}{*} a_2 \overset{S}{*} \dots \overset{S}{*} a_n = \overset{S}{*}_{i=1}^n a_i \quad (2.40)$$

Wzór (2.40) definiuje jednoznacznie S -normę dla n argumentów, gdyż funkcja S spełnia warunki (2.36) i (2.37).

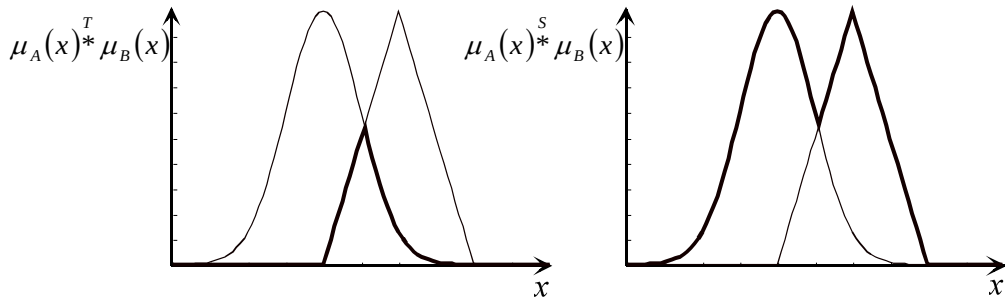
Każdej T -normie odpowiada S -norma (ko-norma), a zależność między nimi jest wyrażona przez

$$a \overset{T}{*} b = 1 - \left[(1-a) \overset{T}{*} (1-b) \right] \quad (2.41)$$

Poniżej przedstawione zostaną przykłady T -norm i odpowiadających im S -norm spotykane w literaturze. Lista ta nie wyczerpuje wszystkich możliwych do zdefiniowania funkcji tego typu. Rysunki 2.11÷2.21 ilustrują działanie norm trójkątnych opisanych poprzedzającymi je wzorami, na przykładowych funkcjach przynależności (gaussowskiej i trójkątnej).

Normy trójkątne typu min/max

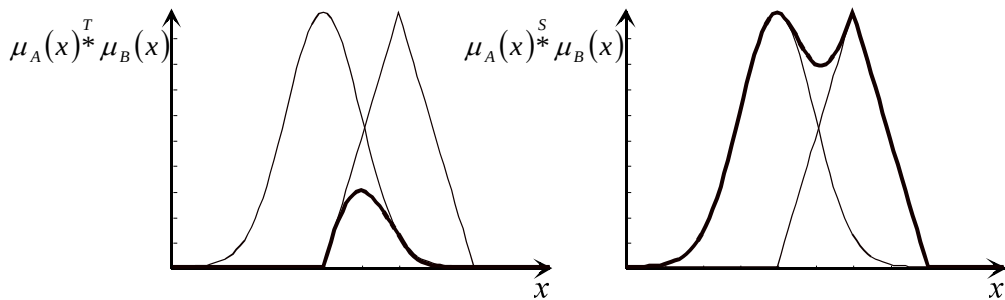
$$T(a,b) = \min(a,b), \quad S(a,b) = \max(a,b) \quad (2.42)$$



Rys. 2.11. Ilustracja operacji T -normy i S -normy typu min/max (2.42).

Probabilistyczne normy trójkątne

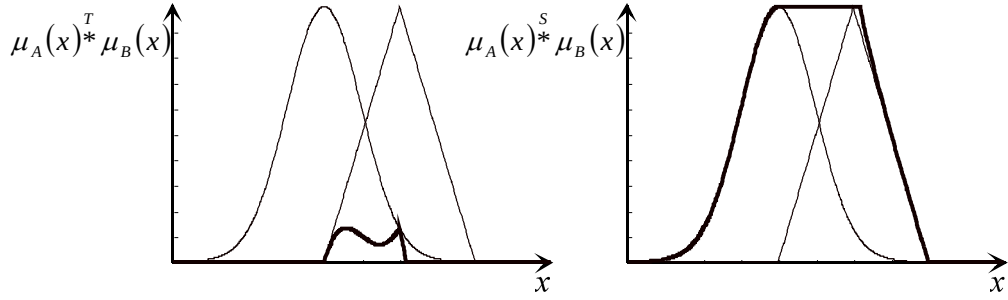
$$T(a,b) = a \cdot b, \quad S(a,b) = a + b - a \cdot b \quad (2.43)$$



Rys. 2.12. Ilustracja operacji T -normy i S -normy probabilistycznych (2.43).

Normy trójkątne typu ograniczona suma

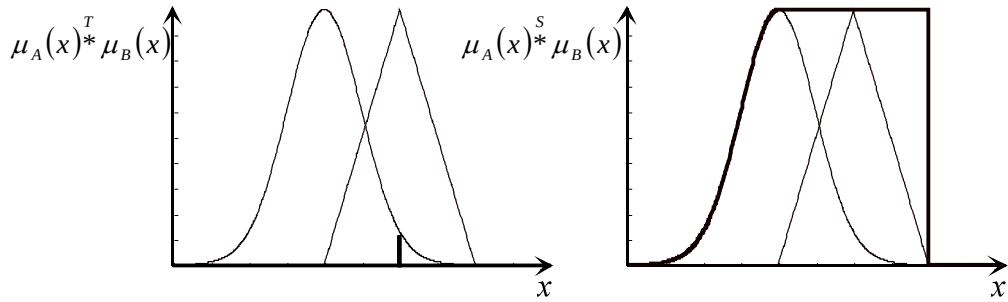
$$T(a,b) = \max(a+b-1, 0), \quad S(a,b) = \min(a+b, 1) \quad (2.44)$$



Rys. 2.13. Ilustracja operacji T-normy i S-normy typu ograniczona suma (2.44).

Graniczne normy trójkątne

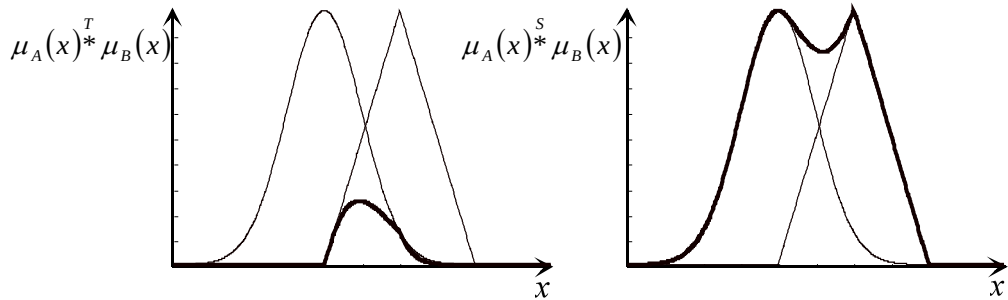
$$T(a,b) = \begin{cases} a & \text{dla } b=1 \\ b & \text{dla } a=1 \\ 0 & \text{dla } a,b \neq 1 \end{cases}, \quad S(a,b) = \begin{cases} a & \text{dla } b=0 \\ b & \text{dla } a=0 \\ 1 & \text{dla } a,b \neq 0 \end{cases} \quad (2.45)$$



Rys. 2.14. Ilustracja operacji T-normy i S-normy opisanych przez (2.45).

Normy trójkątne Hamachera

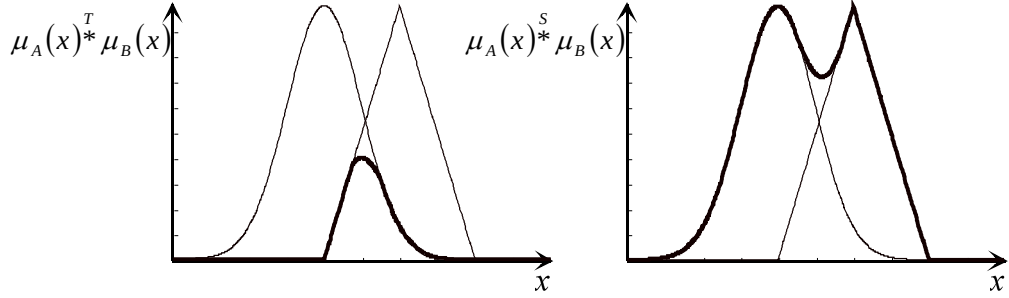
$$T(a,b) = \frac{a \cdot b}{\gamma + (1-\gamma) \cdot (a+b-a \cdot b)}, \quad S(a,b) = \frac{a+b-(2-\gamma) \cdot a \cdot b}{1-(1-\gamma) \cdot a \cdot b} \quad (2.46)$$

gdzie $\gamma > 0$.Rys. 2.15. Ilustracja operacji T-normy i S-normy wg Hamachera (2.46) dla $\gamma=2$.

Normy trójkątne według Dubois i Prade

$$T(a,b) = \frac{a \cdot b}{\max(a,b,\alpha)}, \quad S(a,b) = \frac{a+b-a \cdot b - \min(a,b,1-\alpha)}{\max(1-a,1-b,\alpha)} \quad (2.47)$$

gdzie $\alpha \in [0,1]$.

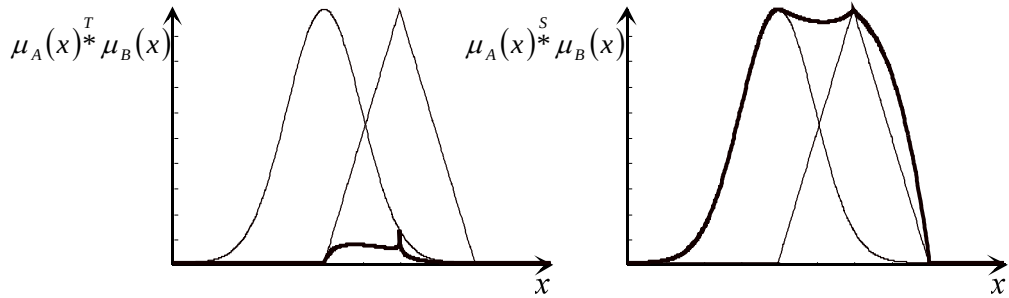


Rys. 2.16. Ilustracja operacji T -normy i S -normy wg Dubois i Prade (2.47) dla $\alpha=3/4$.

Normy trójkątne Dombi

$$T(a,b) = \left[1 + \sqrt[\lambda]{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^\lambda + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^\lambda} \right]^{-1}, \quad S(a,b) = \left[1 + \sqrt[\lambda]{\left(\frac{1}{a} - 1\right)^{-\lambda} + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^{-\lambda}} \right]^{-1} \quad (2.48)$$

gdzie $\lambda > 0$.

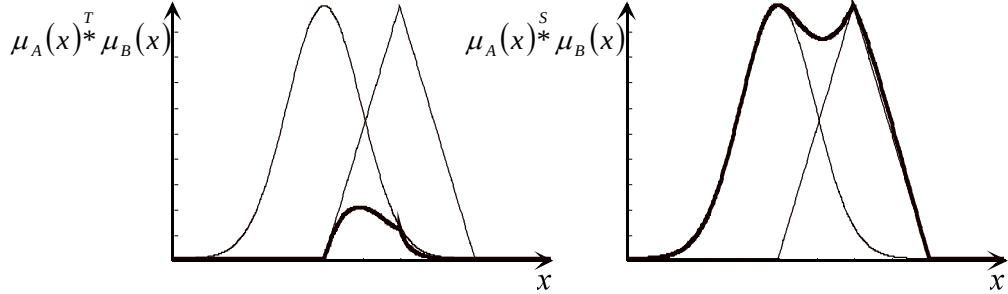


Rys. 2.17. Ilustracja operacji T -normy i S -normy wg Dombi (2.48) dla $\lambda=1/4$.

Normy trójkątne

$$T(a,b)=1-\sqrt[p]{(1-a)^p+(1-b)^p-(1-a)^p\cdot(1-b)^p}, \quad S(a,b)=\sqrt[p]{a^p+b^p-a^p\cdot b^p} \quad (2.49)$$

gdzie $p > 0$.

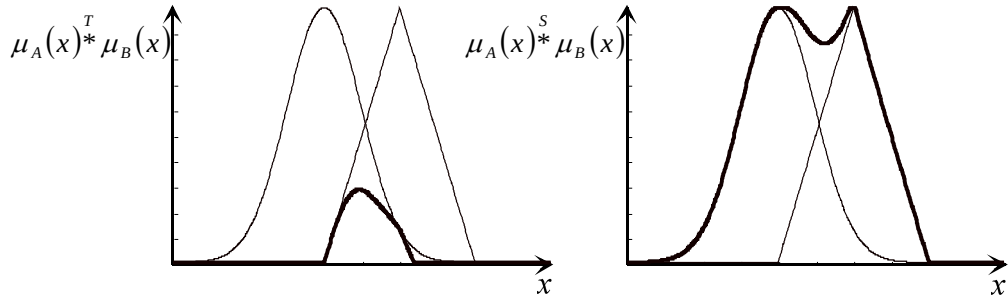


Rys. 2.18. Ilustracja operacji T-normy i S-normy opisanych przez (2.49) dla $p=1/2$.

Normy trójkątne Yagera

$$T(a,b)=\max\left(1-\sqrt[p]{(1-a)^p+(1-b)^p},0\right), \quad S(a,b)=\min\left(\sqrt[p]{a^p+b^p},1\right) \quad (2.50)$$

gdzie $p \geq 1$.

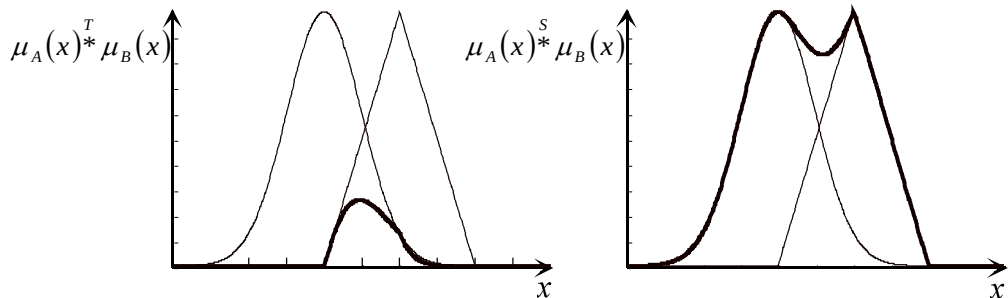


Rys. 2.19. Ilustracja operacji T-normy i S-normy wg Yagera (2.50) dla $p=1,5$.

Normy trójkątne Franka

$$T(a,b)=\log_w\left(1+\frac{(w^a-1)\cdot(w^b-1)}{w-1}\right), \quad S(a,b)=1-\log_w\left(1+\frac{(w^{1-a}-1)\cdot(w^{1-b}-1)}{w-1}\right) \quad (2.51)$$

gdzie $w > 0, w \neq 1$.

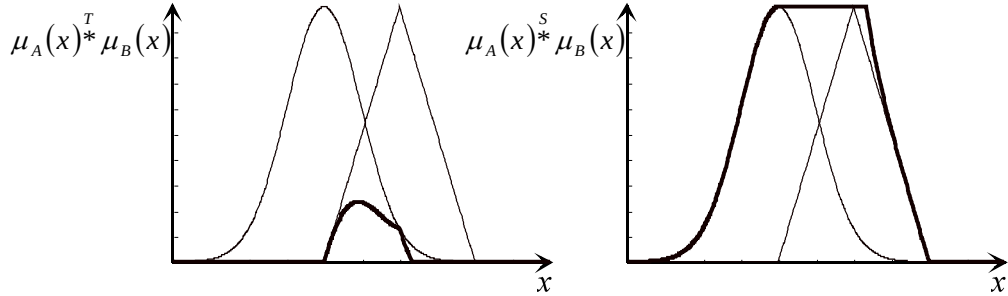


Rys. 2.20. Ilustracja operacji T-normy i S-normy wg Franka (2.51) dla $w=4$.

Inny przykład norm trójkątnych

$$T(a,b) = \max\left(\frac{a+b-1+\lambda \cdot a \cdot b}{1+\lambda}, 0\right), \quad S(a,b) = \min(a+b+\lambda \cdot a \cdot b, 1) \quad (2.52)$$

gdzie $\lambda \geq -1$.



Rys. 2.21. Ilustracja operacji T -normy i S -normy opisanych przez (2.52) dla $\lambda=2$.

T -normy i S -normy wyrażone wzorami (2.42) i (2.45) są normami granicznymi. Żadna T -norma nie przyjmuje wartości większych niż funkcja dana wzorem (2.42) ani mniejszych niż funkcja określona przez (2.45). Żadna S -norma nie przyjmuje natomiast wartości mniejszych niż funkcja wyrażona przez (2.42) ani większych niż funkcja dana wzorem (2.45).

Należy zauważyć, że niektóre z przedstawionych T -norm i S -norm są uogólnieniem innych. Na przykład dla $\gamma=1$ normy (2.46), jak również normy (2.47) dla $\alpha=1$, sprowadzają się do określonych wzorem (2.43).

2.2.3 Podstawowe operacje na zbiorach rozmytych

Poniżej zdefiniowane zostaną podstawowe operacje na zbiorach rozmytych.

Definicja 9

Przecięciem zbiorów rozmytych $A, B \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $A \cap B$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A \cap B}(\mathbf{x}) = \mu_A(\mathbf{x})^T \mu_B(\mathbf{x}) \quad (2.53)$$

gdzie T jest T -normą zdefiniowaną w punkcie 2.2.2.

Przecięciem n zbiorów rozmytych $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty

$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$ określony przez funkcję przynależności

$$\mu_A(\mathbf{x}) = \bigwedge_{i=1}^n \mu_{A_i}(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

Definicja 10

Sumą zbiorów rozmytych $A, B \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $A \cup B$ o funkcji przynależności

$$\mu_{A \cup B}(\mathbf{x}) = \mu_A(\mathbf{x}) \overset{S}{*} \mu_B(\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

gdzie $\overset{S}{*}$ jest S-normą zdefiniowaną w punkcie 2.2.2.

Sumą zbiorów rozmytych $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty

$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ określony przez funkcję przynależności

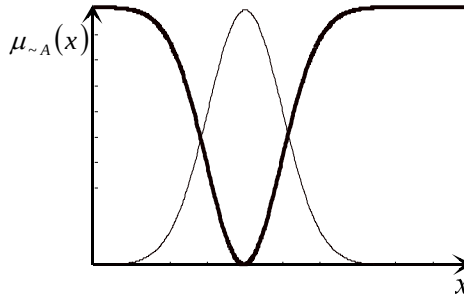
$$\mu_A(\mathbf{x}) = \overset{n}{S} \mu_{A_i}(\mathbf{x}) \quad (2.56)$$

Definicja 11

Dopełnieniem zbioru $A \subseteq \mathbf{X}$ jest zbiór rozmyty $\sim A$ o funkcji przynależności

$$\mu_{\sim A}(\mathbf{x}) = 1 - \mu_A(\mathbf{x}) \quad (2.57)$$

Ilustrację dopełnienia przykładowego zbioru rozmytego przedstawia rysunek 2.22.



Rys. 2.22. Ilustracja operacji dopełnienia zbioru rozmytego.

Definicja 12

Iloczyn kartezjański zbiorów rozmytych $A \subseteq \mathbf{X}$ i $B \subseteq \mathbf{Y}$, oznaczany przez $A \times B$, jest definiowany jako

$$\mu_{A \times B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\{\mu_A(\mathbf{x}), \mu_B(\mathbf{y})\} \quad (2.58)$$

lub

$$\mu_{A \times B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu_A(\mathbf{x}) \cdot \mu_B(\mathbf{y}) \quad (2.59)$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ i $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

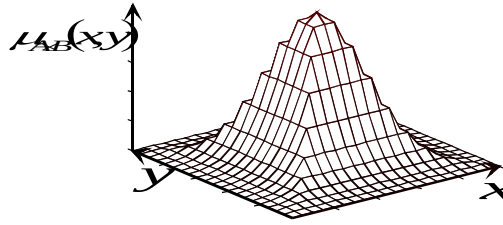
Iloczyn kartezjański n zbiorów rozmytych $A_1 \subseteq \mathbf{X}_1$, $A_2 \subseteq \mathbf{X}_2, \dots, A_n \subseteq \mathbf{X}_n$, oznaczany $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, jest określony przez

$$\begin{aligned} \mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \min \{ \mu_{A_1}(\mathbf{x}_1), \mu_{A_2}(\mathbf{x}_2), \dots, \mu_{A_n}(\mathbf{x}_n) \} \\ &= \min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i}(\mathbf{x}_i) \} \end{aligned} \quad (2.60)$$

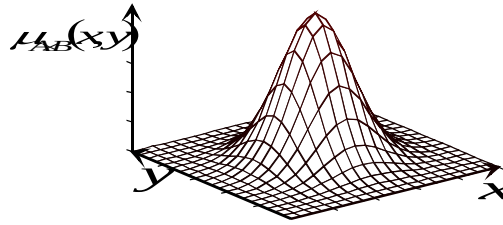
lub

$$\begin{aligned} \mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) &= \mu_{A_1}(\mathbf{x}_1) \cdot \mu_{A_2}(\mathbf{x}_2) \cdot \dots \cdot \mu_{A_n}(\mathbf{x}_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Na rysunkach 2.23 i 2.24 zamieszczono wykresy ilustrujące iloczyn kartezjański dwóch zbiorów rozmytych o gaussowskich funkcjach przynależności, zdefiniowany zgodnie z wzorem (2.58) i (2.59).



Rys. 2.23. Ilustracja iloczynu kartezjańskiego realizowanego przez minimum.



Rys. 2.24. Ilustracja iloczynu kartezjańskiego realizowanego przez iloczyn.

2.2.4 Relacje rozmyte

Poniżej przedstawiono definicje dotyczące relacji rozmytej [49]. W książkach [11] i [66] zostały one zdefiniowane odmiennie, prowadzą jednak do identycznych wyników.

Definicja 13

Relacją rozmytą R między dwoma niepustymi zbiorami (nierozmytymi) $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, tzn. $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Analogicznie jak w definicji 1, zbiór ten określamy następująco

$$R = \{ ((\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mu_R(\mathbf{x}, \mathbf{y})); \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \} \quad (2.62)$$

gdzie

$$\mu_R : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow [0,1] \quad (2.63)$$

jest funkcją przynależności relacji rozmytej R .

Wartość funkcji (2.63) interpretuje się jako stopień powiązania (w danej relacji) między elementami zbiorów $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$. Należy także zauważyć, że jeśli iloczyn kartezjański zbiorów $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ potraktujemy jako przestrzeń rozważań, to wzór (2.62) sprowadza się do definicji (2.1), a więc relacja rozmyta jest zbiorem rozmytym i dotyczą jej wszystkie definicje i rozważania przedstawione dla zbiorów rozmytych.

Definicja 14

Złożeniem typu sup- T relacji rozmytych $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i $S \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ nazywamy relację rozmytą $R \circ S \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Z}$ o funkcji przynależności

$$\mu_{R \circ S}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \left\{ \mu_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) * \mu_S(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \right\} \quad (2.64)$$

Podobnie zdefiniować można złożenie zbioru rozmytego i relacji rozmytej.

Definicja 15

Złożeniem typu sup- T zbioru rozmytego $A \subseteq \mathbf{X}$ i relacji rozmytej $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ nazywamy zbiór rozmyty $B = A \circ R \subseteq \mathbf{Y}$ o funkcji przynależności

$$\mu_B(\mathbf{y}) = \mu_{A \circ R}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left\{ \mu_A(\mathbf{x}) * \mu_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\} \quad (2.65)$$

Przypadek szczególny zachodzi, gdy przestrzeń $\mathbf{Y} \subset \mathbf{R}$, wówczas

$$\mu_B(y) = \mu_{A \circ R}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \left\{ \mu_A(\mathbf{x}) * \mu_R(\mathbf{x}, y) \right\} \quad (2.66)$$

Złożenie $A \circ R$ można również definiować [11] jako projekcję przecięcia rozszerzenia cylindrycznego $ce(A)$ zbioru rozmytego A oraz relacji rozmytej R , na przestrzeń $\mathbf{Y}$

$$B = A \circ R = \text{proj}\{ce(A) \cap R\} \text{ na } \mathbf{Y} \quad (2.67)$$

gdzie rozszerzenie cylindryczne i projekcja jest zdefiniowana poniżej (def. 16 i 17).

Definicja 16

Rozszerzenie cylindryczne zbioru $A \subseteq \mathbf{X}$ w $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ definiuje się przez

$$ce(A) = \int_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \frac{\mu_A(\mathbf{x})}{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (2.68)$$

Definicja 17

Projekcją zbioru rozmytego $A \subseteq \mathbf{X}$ na przestrzeń $\mathbf{Y}$ nazywamy operację określoną przez

$$\text{proj } A \text{ na } \mathbf{Y} = \int_{y \in \mathbf{Y}} \frac{\sup_{x \in \mathbf{X}} \mu_A(\mathbf{x}, y)}{y} \quad (2.69)$$

Każdy zbiór rozmyty zdefiniowany na iloczynie kartezjańskim można traktować jako relację rozmytą. Można zatem stosować definicję 14 do tworzenia złożenia dwóch zbiorów rozmytych A i B , jeżeli tylko uda się rozbić zbiory, na których są one zdefiniowane, na odpowiednie iloczyny kartezjańskie.

2.3 Przybliżone wnioskowanie

W przybliżonym wnioskowaniu, na podstawie wartości zmiennych lingwistycznych $\mathbf{x}$, określonych przez odpowiednio zdefiniowany zbiór rozmyty A' , w oparciu o posiadaną wiedzę wnioskuje się o wartości zmiennej lingwistycznej y . W procesie tym wiedza jest bazą reguł składającą się z implikacji zawierających informację o relacjach zachodzących między wielkościami będącymi przedmiotem rozważań.

2.3.1 Podstawowy schemat wnioskowania

Jako podstawową uznaje się regułę wnioskowania *modus ponens*, określoną według następującego schematu

Przesłanka	$\mathbf{x}$ jest A'	(2.70)
Implikacja	JEŻELI $\mathbf{x}$ jest A TO y jest B	
Wniosek	y jest B'	

W przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych (p. 2.1.3) regułę tę można również zapisać w następującej postaci

Przesłanka	x_1 jest A'_1 I x_2 jest A'_2 I ... I x_n jest A'_n	(2.71)
Implikacja	JEŻELI x_1 jest A_1 I x_2 jest A_2 I ... I x_n jest A_n TO y jest B	
Wniosek	y jest B'	

Jak widać, na podstawie przesłanki określonej przez zbiór rozmyty $A' \subseteq \mathbf{X}$ oraz implikacji wykorzystującej zbiory rozmyte $A \subseteq \mathbf{X}$ i $B \subseteq \mathbf{Y}$, w procesie wnioskowania zostaje sformułowany wniosek, a w nim określony zbiór rozmyty $B' \subseteq \mathbf{Y}$ zgodnie ze wzorem

$$B' = A' \circ (A \rightarrow B) \quad (2.72)$$

Funkcję przynależności zbioru rozmytego B' wyznacza się na podstawie definicji złożenia zbioru rozmytego A i rozmytej relacji $A \rightarrow B$, według wzoru (2.66). Zależy ona ponadto od przyjętych definicji rozmytej implikacji (p. 2.3.2) i T -normy (p. 2.2.2), a wyraża się następująco

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{A'}(\mathbf{x})^T \mu_{A \rightarrow B}(\mathbf{x}, y) \right\} \quad (2.73)$$

Zwykle w celu określenia zależności między zmiennymi lingwistycznymi w przestrzeni $\mathbf{X}$, a zmiennymi w przestrzeni $\mathbf{Y}$, definiuje się N implikacji R^k postaci

$$R^k : \text{ JEŻELI } \mathbf{x} \text{ jest } A^k \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (2.74)$$

które w przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych mogą przyjąć postać

$$R^k : \text{ JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (2.75)$$

Możliwe są wtedy dwa podejścia. Pierwsze, tzw. globalne polega na sprowadzeniu wszystkich implikacji do jednej reguły globalnej. Drugie, tzw. lokalne polega na przeprowadzeniu procesu wnioskowania niezależnie dla każdej implikacji. W dalszym ciągu pracy stosowane będzie jedynie podejście lokalne. Prowadzi ono do powstania N zbiorów rozmytych B'^k zgodnie ze wzorem

$$B'^k = A' \circ (A^k \rightarrow B^k) \quad (2.76)$$

dla $k = 1 \dots N$, o funkcjach przynależności zdefiniowanych następująco

$$\mu_{B'^k}(y) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{A'}(\mathbf{x})^T \mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) \right\} \quad (2.77)$$

Na ich podstawie, w oparciu o przyjętą metodę agregacji wyznacza się wynikowy zbiór rozmyty B' . W książce [66] przedstawione zostały dwa modele lingwistyczne: powszechnie stosowany model konstruktywny (typu Mamdaniego) oraz model destrukcyjny (typu logicznego). W zależności od przyjętego modelu można zastosować jedną z wielu reguł wnioskowania.

2.3.2 Reguły wnioskowania dla modelu konstruktywnego

W modelu tym zbiór wynikowy B' jest konstruowany jako superpozycja zbiorów B'^k będących wynikiem procesów wnioskowania dla poszczególnych implikacji. Zbiór B' jest sumą zbiorów rozmytych B'^k , czyli agregację dokonuje się na podstawie wzoru

$$B' = \bigcup_{k=1}^N B'^k \quad (2.78)$$

co, zgodnie z definicją 10, realizujemy poprzez S -normę

$$\mu_{B'}(y) = S_{k=1}^N \mu_{B'^k}(y) \quad (2.79)$$

Najczęściej wykorzystuje się w tym przypadku operację maksimum

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1 \dots N} \{ \mu_{B'^k}(y) \} \quad (2.80)$$

W modelu konstruktywnym można zastosować m.in. następujące reguły wnioskowania

Reguła typu minimum (Mamdaniego)

Reguła ta jest wyrażona następującym wzorem

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \min[\mu_{A^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(y)] \quad (2.81)$$

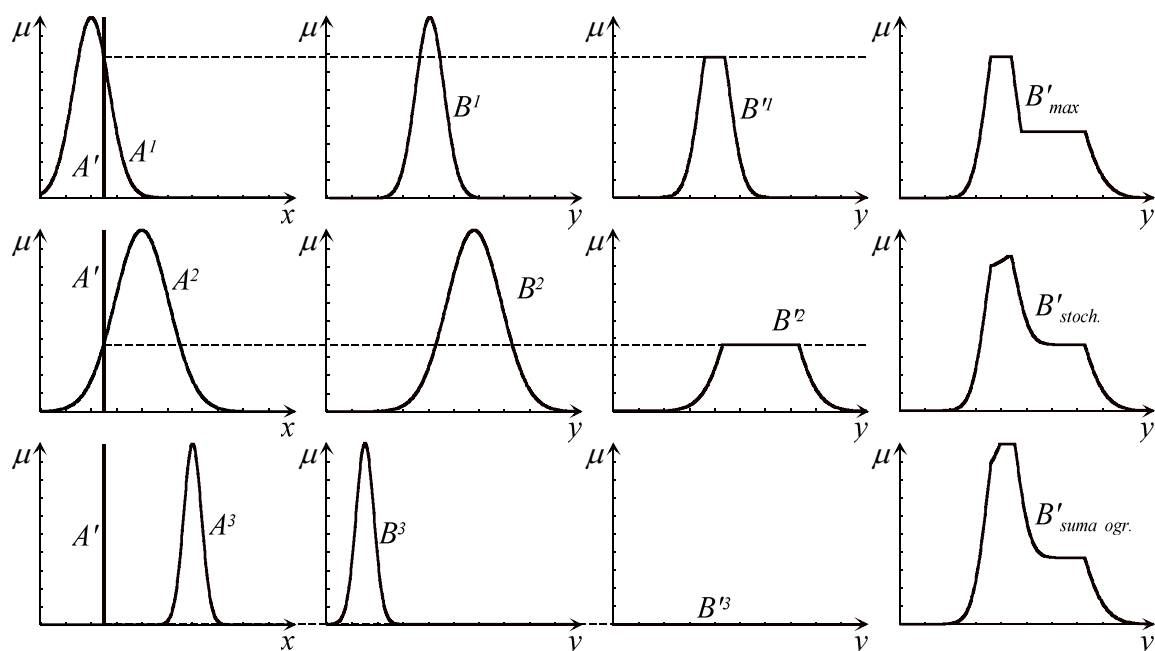
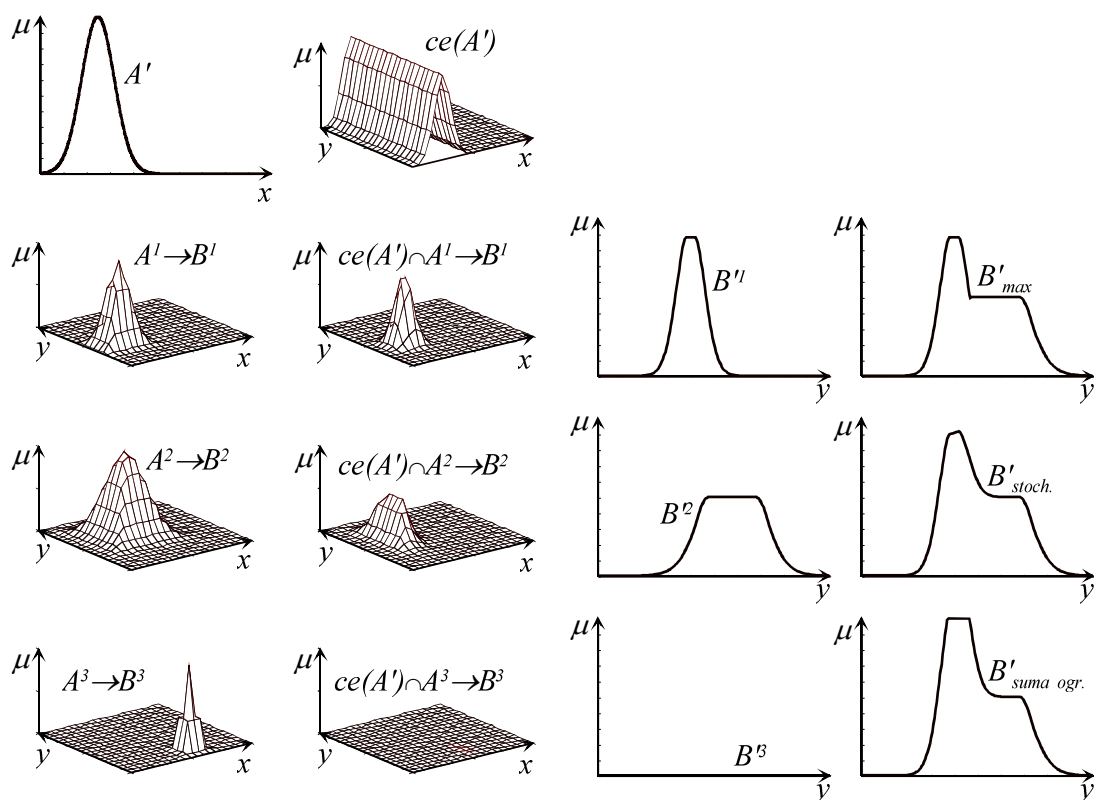
Ten sposób wnioskowania ilustrują wykresy na rysunkach 2.25 i 2.26. Przedstawiające proces wnioskowania dla trzech reguł, w przypadku gdy zbiór rozmyty A' zawarty w przesłance jest typu *singleton* (2.7) oraz w przypadku bardziej ogólnym, gdy jest on opisany gaussowską funkcją przynależności (2.8). W celu zachowania przejrzystości rysunków przyjęto, że przestrzeń wejściowa jest podzbiorem liczb rzeczywistych. Rysunki uzupełniono o wykresy zbiorów rozmytych B' w trzech różnych wersjach, zależnie od normy trójkątnej wykorzystanej do realizacji operacji agregacji.

Reguła typu iloczyn (Larsena)

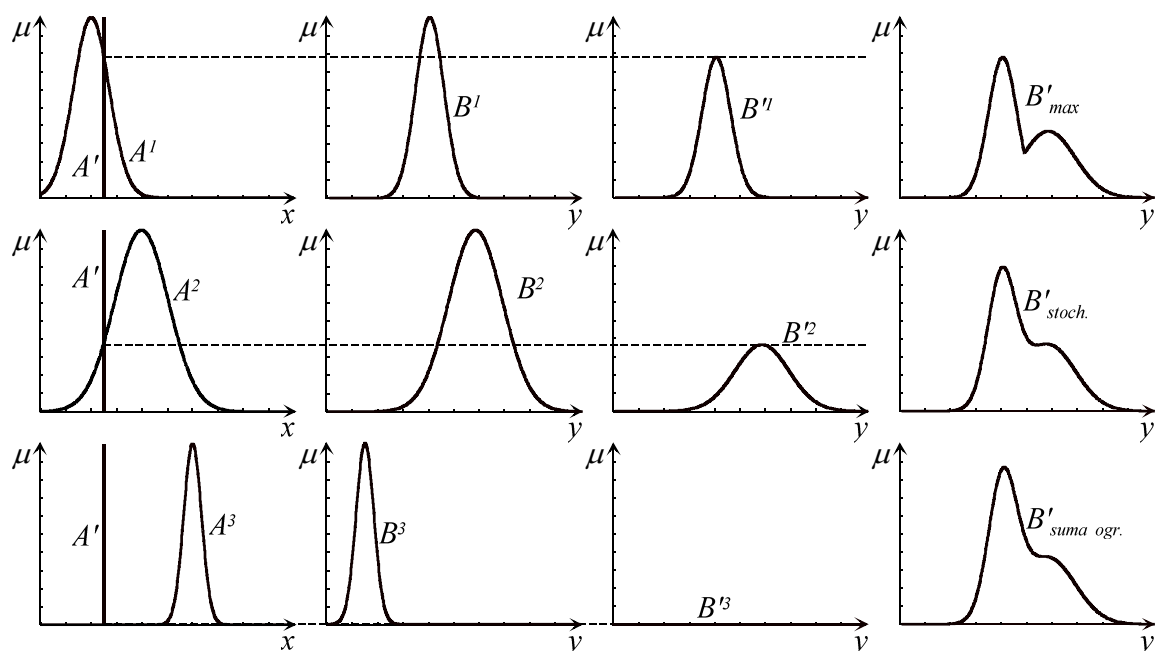
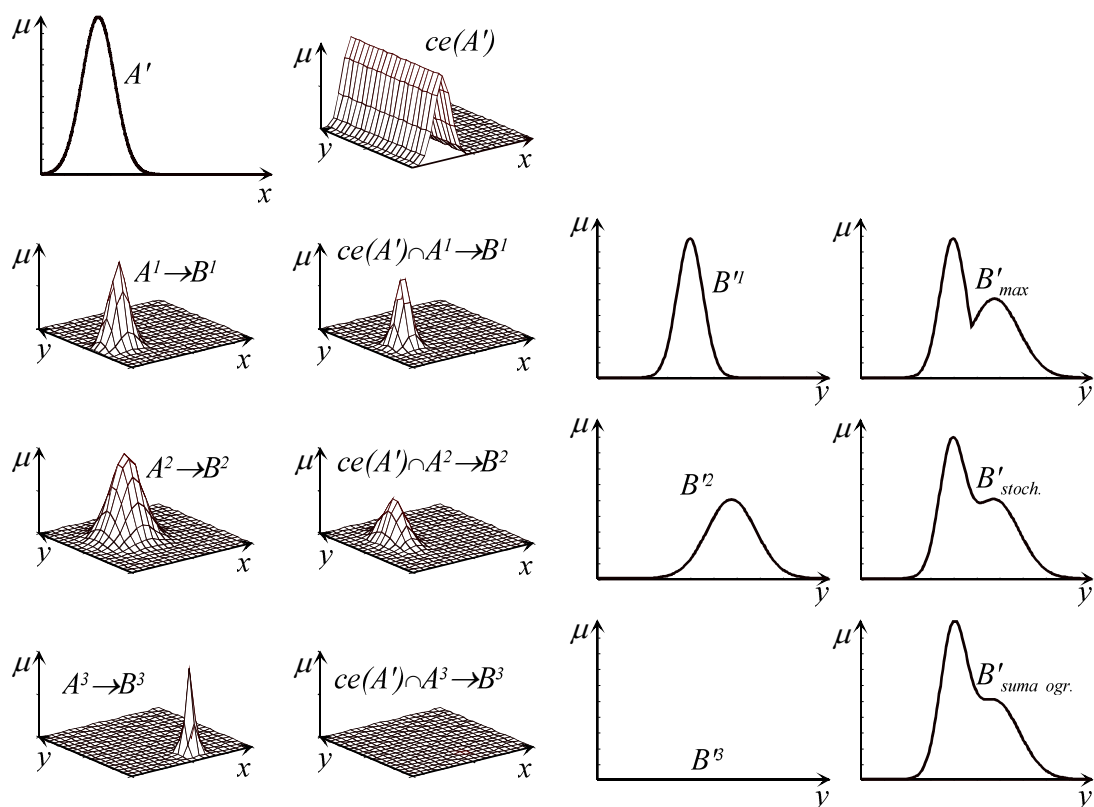
Reguła Larsena wyraża się wzorem

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \mu_{A^k}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{B^k}(y) \quad (2.82)$$

Podobnie jak w przypadku reguły Mamdaniego, proces wnioskowania został przedstawiony na analogicznych rysunkach. Rysunek 2.27 dotyczy przypadku zbioru rozmytego A' typu *singleton*, a rysunek 2.28 – przypadku bardziej ogólnego, gdy zbiór rozmyty A' nie jest *singletonem*.

Rys. 2.25. Przykład wnioskowania wg reguły Mamdaniego dla zbioru A' typu singleton.

Rys. 2.26. Przykład wnioskowania wg reguły Mamdaniego - przypadek ogólny.

Rys. 2.27. Przykład wnioskowania wg reguły Larsena dla zbioru A' typu singleton.

Rys. 2.28. Przykład wnioskowania wg reguły Larsena - przypadek ogólny.

2.3.3 Reguły wnioskowania dla modelu destrukcyjnego

W tak zwanym modelu destrukcyjnym wynik otrzymuje się poprzez usunięcie możliwości nie akceptowanych przez poszczególne implikacje. Zbiór wynikowy B' jest przecięciem zbiorów rozmytych B'^k , czyli agregację dokonuje się według wzoru

$$B' = \bigcap_{k=1}^N B'^k \quad (2.83)$$

co, zgodnie z definicją 9, realizujemy poprzez T -normę

$$\mu_{B'}(y) = T_{k=1}^N \mu_{B'^k}(y) \quad (2.84)$$

Najczęściej wykorzystuje się w tym przypadku operację minimum

$$\mu_{B'}(y) = \min_{k=1 \dots N} \{ \mu_{B'^k}(y) \} \quad (2.85)$$

lub iloczyn

$$\mu_{B'}(y) = \prod_{j=1}^N \mu_{B'^j}(y) \quad (2.86)$$

W modelu destrukcyjnym można zastosować m.in. następujące reguły wnioskowania

Reguła binarna (Kleenego-Dienes, Dienes-Reschera)

Wnioskowanie według reguły binarnej odbywa się zgodnie ze wzorem

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \max[1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(y)] \quad (2.87)$$

Proces wnioskowania dla przypadku, gdy zbiór rozmyty A' jest typu *singleton*, oraz gdy jest zdefiniowany przez funkcję gaussowską, przedstawiają rysunki 2.29 i 2.30.

Reguła Łukasiewicza

Reguła Łukasiewicza zdefiniowana jest następująco

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \min[1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x}) + \mu_{B^k}(y)] \quad (2.88)$$

Reguła przedstawiona wzorem (2.88) w pracy [62] nosi nazwę reguły arytmetycznej, natomiast w [24] i [68] – ograniczonej sumy. W większości prac, w tym m.in. [11], [18], [29] i [49], nazywa się ją regułą Łukasiewicza. Proces wnioskowania według tej reguły ilustruje rysunek 2.31 (dla A' typu *singleton*) i rysunek 2.32 (A' z gaussowską funkcją przynależności).

Reguła typu max-min (Zadeha)

Implikacja według Zadeha wyrażona jest wzorem

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \max \{ \min [\mu_{A^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(y)], 1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x}) \} \quad (2.89)$$

Proces wnioskowania na podstawie implikacji (2.89) jest przedstawiony na rysunkach 2.33 i 2.34. Pierwszy z nich dotyczy przypadku zbioru rozmytego A' typu *singleton*, a drugi – zbioru A' zdefiniowanego przez gaussowską funkcję przynależności.

Reguła Goguena

Reguła ta jest wyrażona następującym wzorem

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} \min \left[1, \frac{\mu_{B^k}(y)}{\mu_{A^k}(\mathbf{x})} \right] & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

Proces wnioskowania dla przypadku gdy zbiór rozmyty A' jest typu *singleton*, oraz gdy jest on określony przez funkcję gaussowską, przedstawiają rysunki 2.35 i 2.36.

Reguła Sharpa

Reguła Sharpa zdefiniowana jest następująco

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) \leq \mu_{B^k}(y) \\ 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) > \mu_{B^k}(y) \end{cases} \quad (2.91)$$

Proces wnioskowania zgodnie ze wzorem (2.91) jest pokazany na rysunkach 2.37 i 2.38. Pierwszy z nich dotyczy przypadku zbioru rozmytego A' typu *singleton*, a drugi – zbioru A' określonego przez gaussowską funkcję przynależności.

Reguła Gödela

Wnioskowanie według reguły Gödela odbywa się zgodnie ze wzorem

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) \leq \mu_{B^k}(y) \\ \mu_{B^k}(y) & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) > \mu_{B^k}(y) \end{cases} \quad (2.92)$$

Proces wnioskowania dla przypadku, gdy zbiór rozmyty A' jest typu *singleton*, oraz gdy jest zdefiniowany przez funkcję gaussowską, pokazano na rysunkach 2.39 i 2.40.

Reguła probabilistyczna

Reguła probabilistyczna zdefiniowana jest następująco

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \min[1, 1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x}) + \mu_{A^k}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{B^k}(y)] \quad (2.93)$$

Sposób wnioskowania według tej reguły rozmytej implikacji dla zbioru rozmytego A' typu *singleton* jest przedstawiony na rysunku 2.41, natomiast w przypadku funkcji gaussowskiej – na rysunku 2.42.

Reguła ograniczonej sumy

W poszczególnych opracowaniach pod nazwą reguły ograniczonej sumy przedstawiane są różne rozmyte implikacje. W artykule [24], którego autor powołuje się na [68], regułą ograniczonej sumy nazywany jest wzór, który w niniejszej pracy oraz m.in. w [11], [18], [29] i [49], wymieniany jest jako reguła Łukasiewicza (2.88). W książkach [19] i [49] można znaleźć regułę ograniczonej sumy opartą na S-normie (2.44) o tej samej nazwie, w postaci

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \min[1, \mu_{A^k}(\mathbf{x}) + \mu_{B^k}(y)] \quad (2.94)$$

Proces wnioskowania przeprowadzony zgodnie z regułą (2.94) zilustrowano na rysunkach 2.43 i 2.44.

Reguła Willmotta

W opracowaniu [70] reguła Willmotta została przedstawiona w postaci

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \max[\min(\mu_{A^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(y)), 1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x}), \min(\mu_{B^k}(y), 1 - \mu_{B^k}(y))] \quad (2.95)$$

Łatwo wykazać, że jest ona tożsama z regułą Zadeha (2.89). Zauważmy, że $\min(\mu_{B^k}(y), 1 - \mu_{B^k}(y)) \leq 0,5$. Jeżeli $\mu_{A^k}(\mathbf{x}) \geq 0,5$, to $\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \min(\mu_{A^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(y))$. Jeżeli $\mu_{A^k}(\mathbf{x}) \leq 0,5$, to $\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = 1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x})$. Zatem fragment $\min(\mu_{B^k}(y), 1 - \mu_{B^k}(y))$, który nigdy nie będzie większy od dwóch pozostałych, można usunąć, sprowadzając regułę (2.95) do (2.89). Wynika z tego, że wszystkie rozważania dotyczące reguły Zadeha dotyczą również reguły Willmotta w formie (2.95).

W pracy [18] przedstawiono odmienny wzór określający regułę Willmotta

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \min[\max(1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(y)), \max(\mu_{A^k}(\mathbf{x}), 1 - \mu_{B^k}(y), \min(\mu_{B^k}(y), 1 - \mu_{A^k}(\mathbf{x})))] \quad (2.96)$$

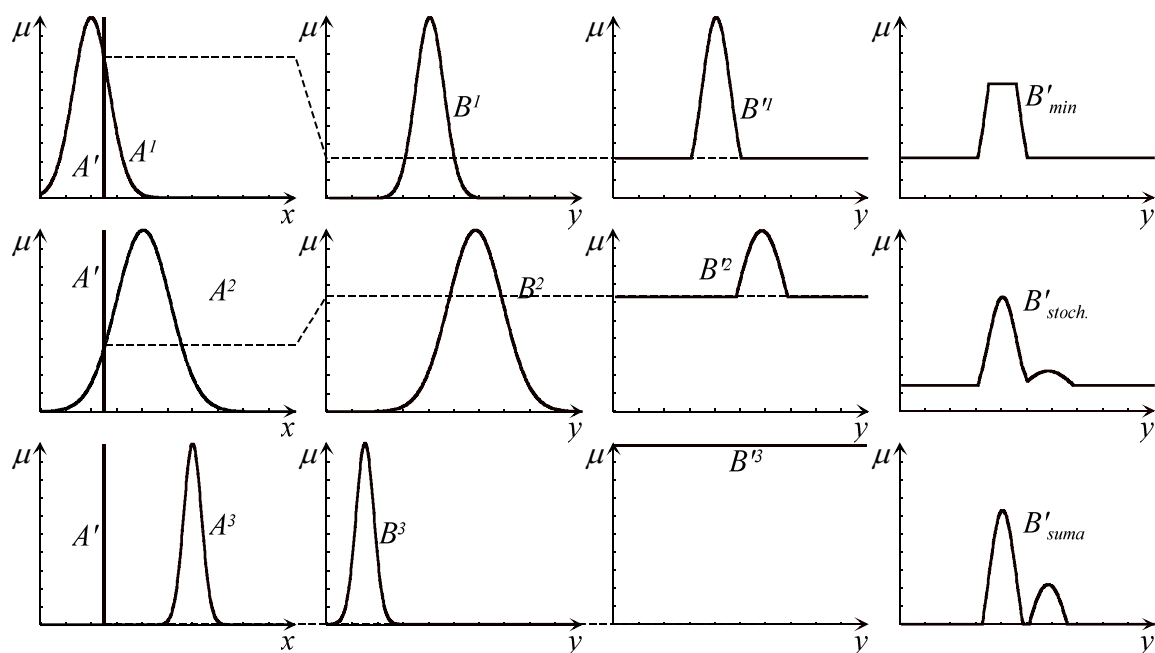
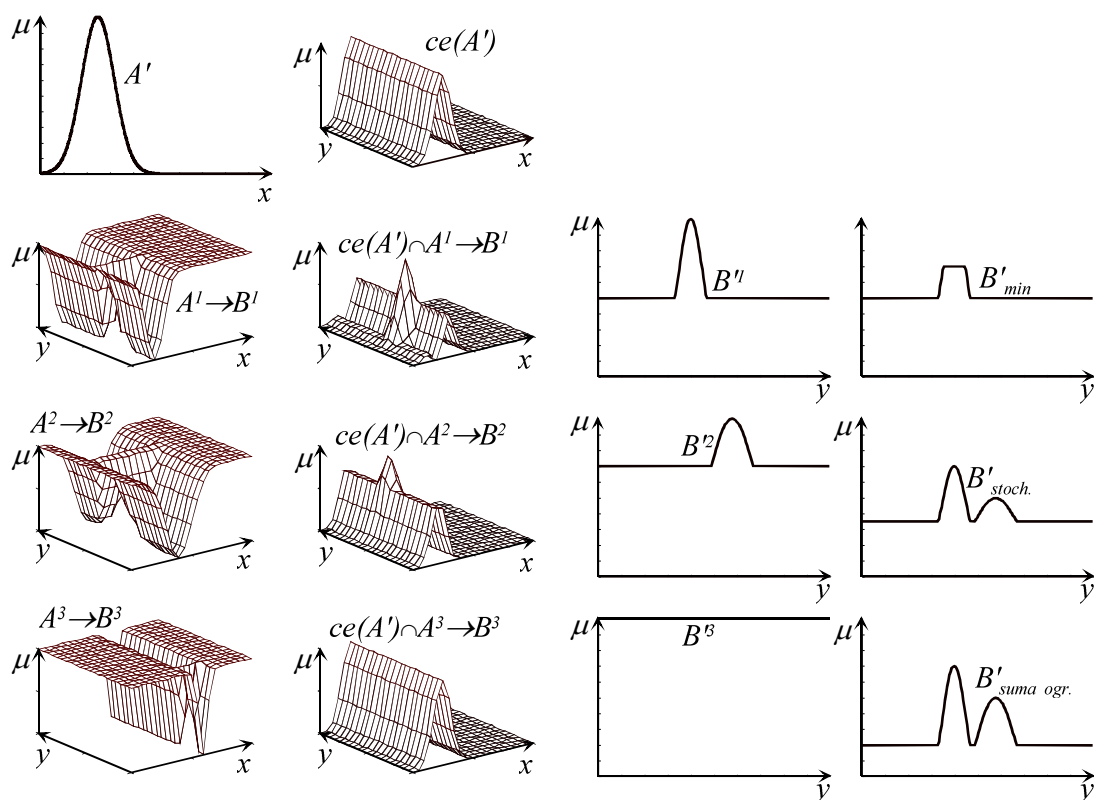
W dalszych rozważaniach wykorzystywana będzie definicja w postaci (2.96). Proces wnioskowania przeprowadzony zgodnie z tą postacią reguły został przedstawiony na rysunkach 2.45 i 2.46.

Reguła Yagera

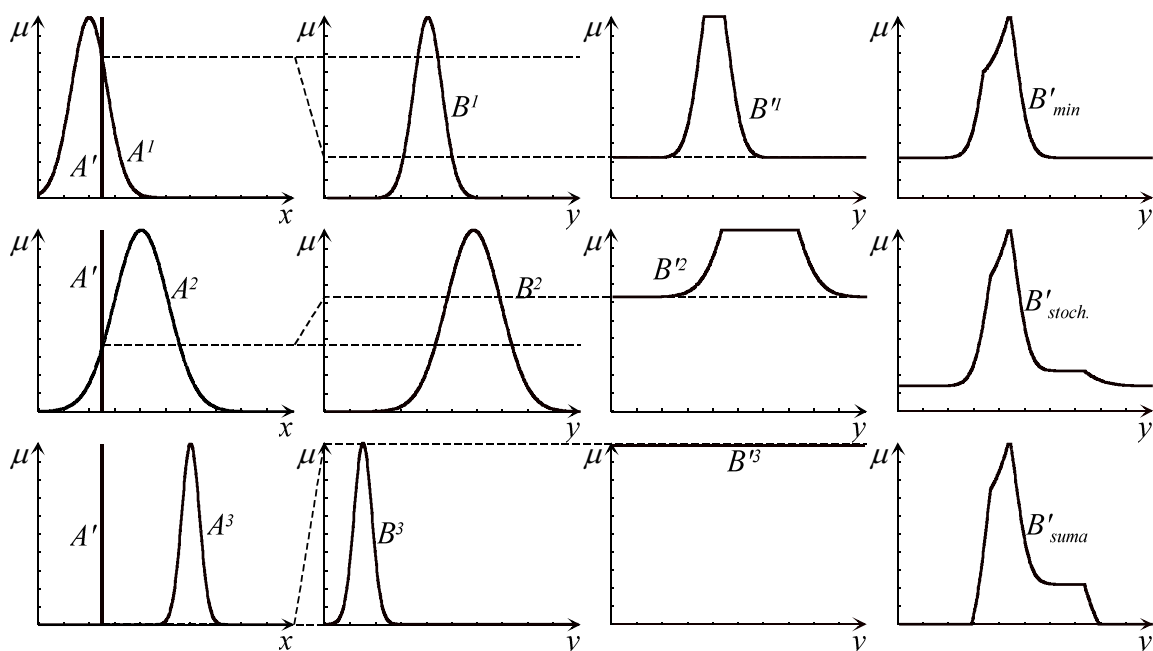
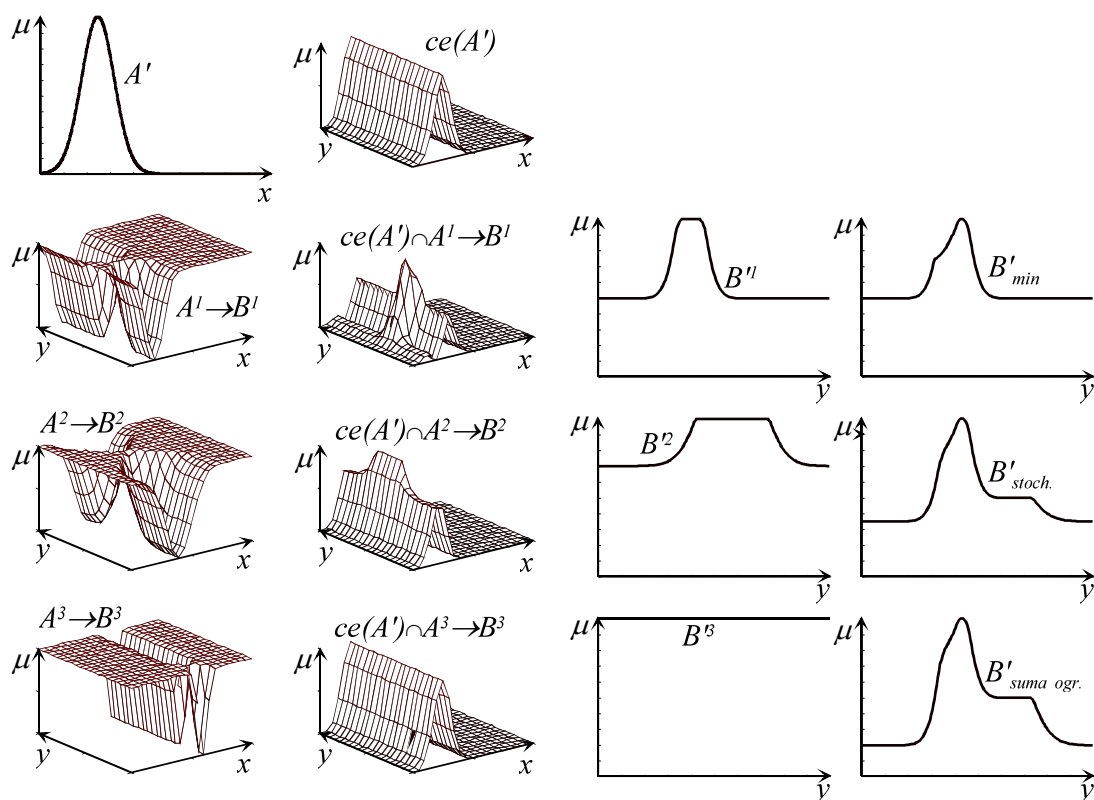
Wnioskowanie według reguły Yagera odbywa się zgodnie ze wzorem

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, y) = \begin{cases} \mu_{B^k}(y)^{\mu_{A^k}(\mathbf{x})} & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (2.97)$$

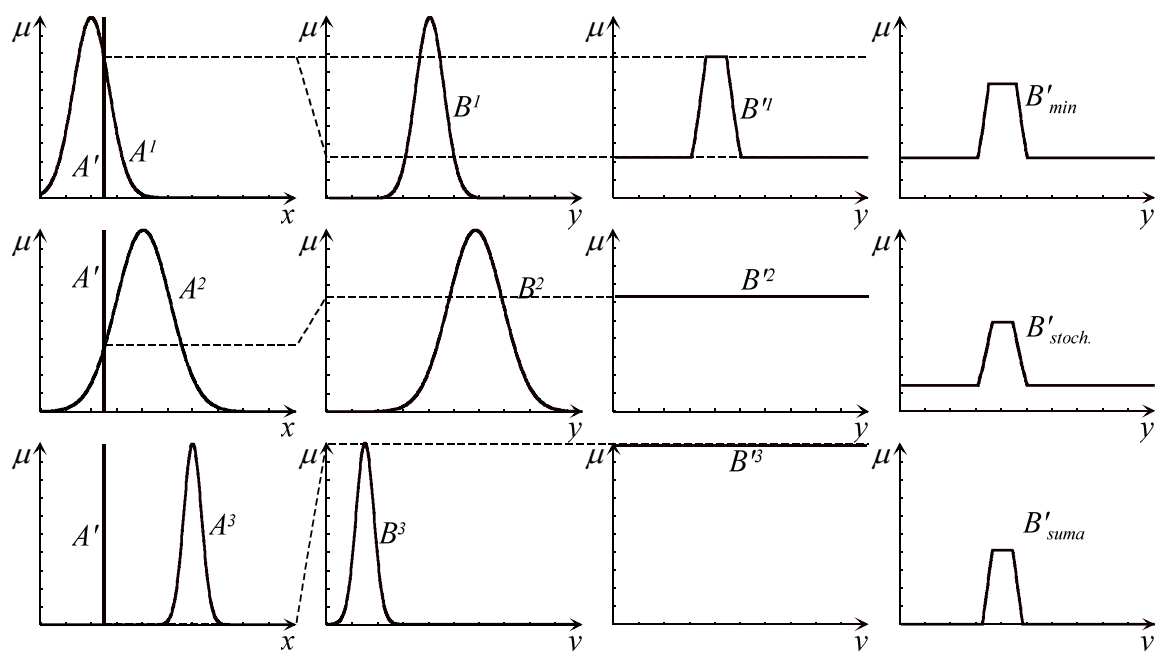
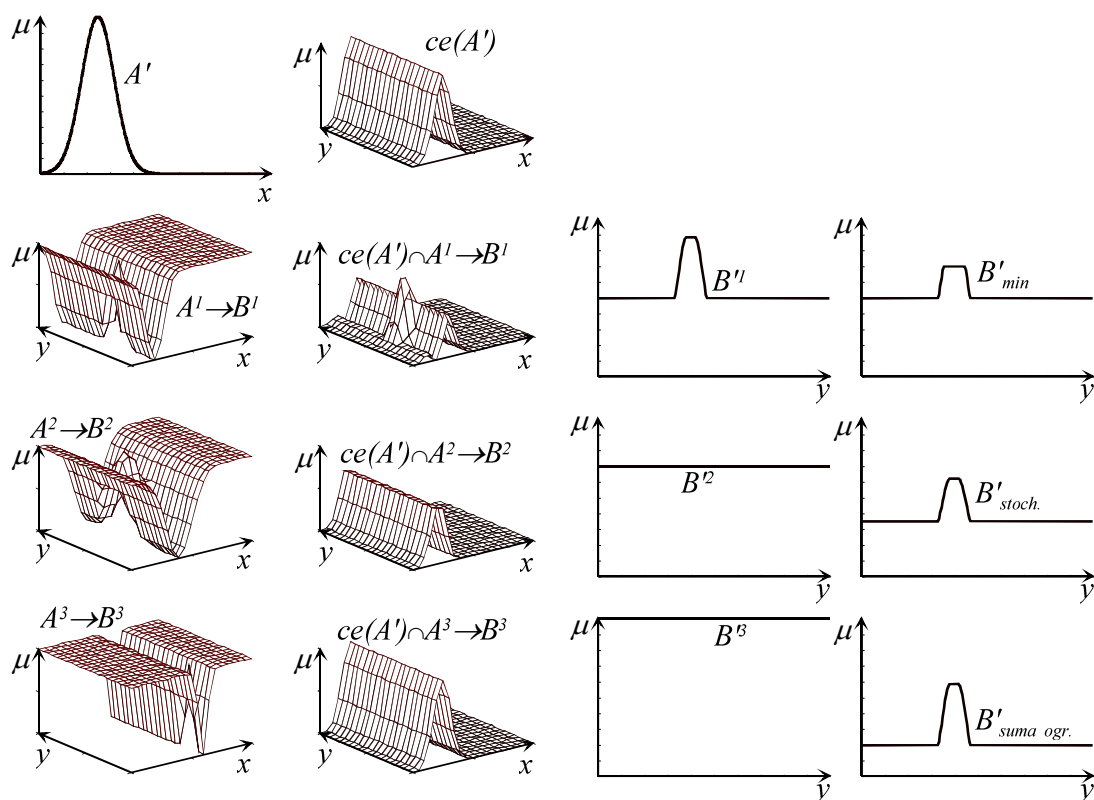
Proces wnioskowania dla przypadku, gdy zbiór rozmyty A' jest typu *singleton*, oraz gdy jest zdefiniowany przez funkcję gaussowską, jest pokazany na rysunkach 2.47 i 2.48.

Rys. 2.29. Przykład wnioskowania wg reguły binarnej dla zbioru A' typu singleton.

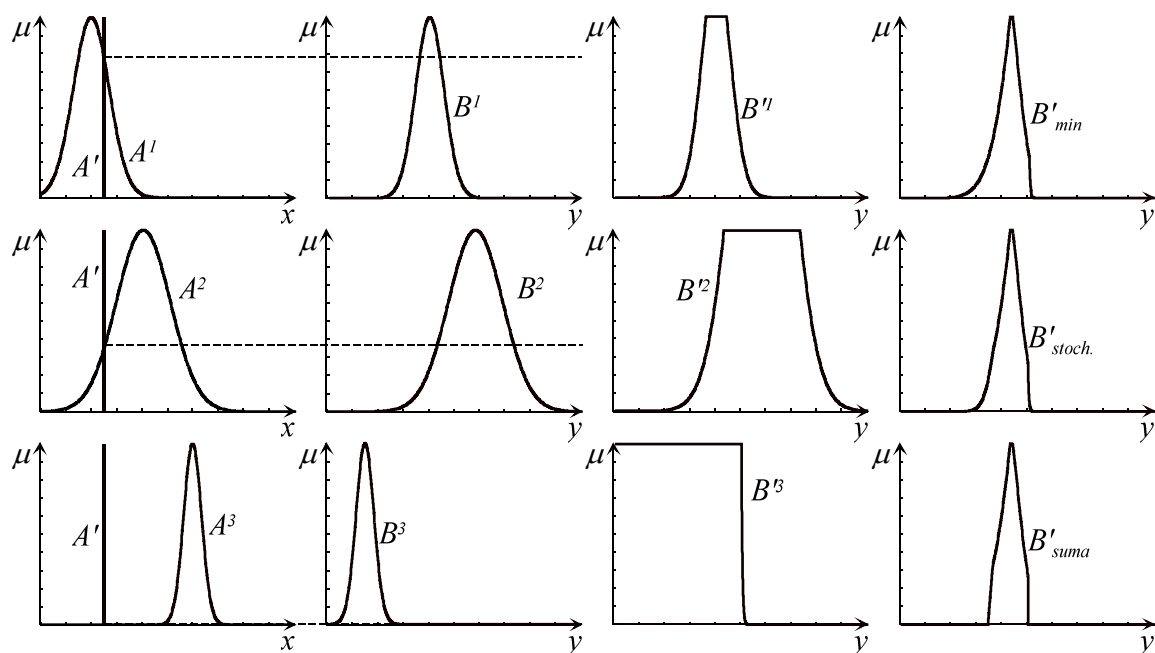
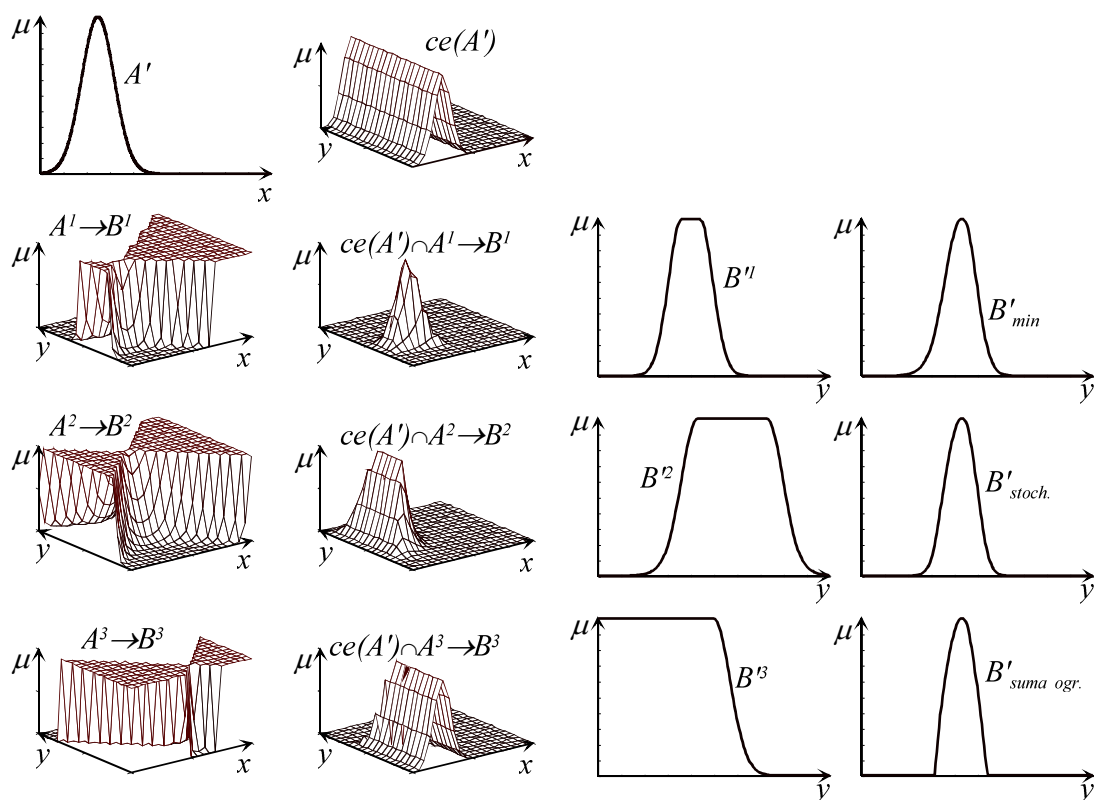
Rys. 2.30. Przykład wnioskowania wg reguły binarnej - przypadek ogólny.

Rys. 2.31. Przykład wnioskowania wg reguły Łukasiewicza dla zbioru A' typu singleton.

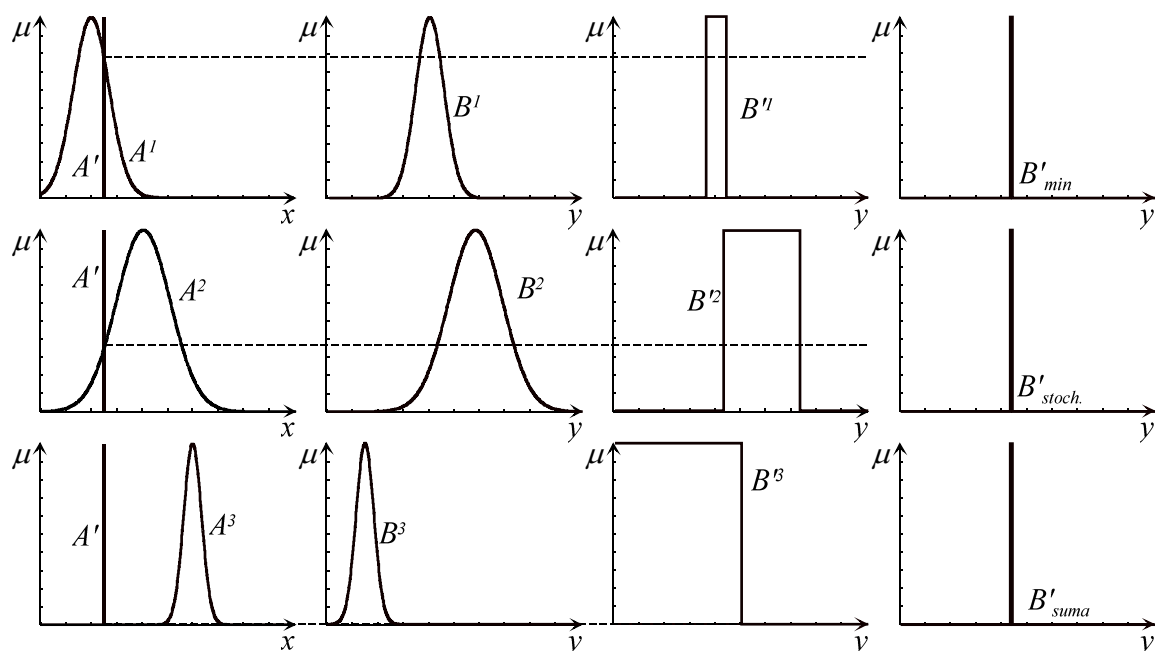
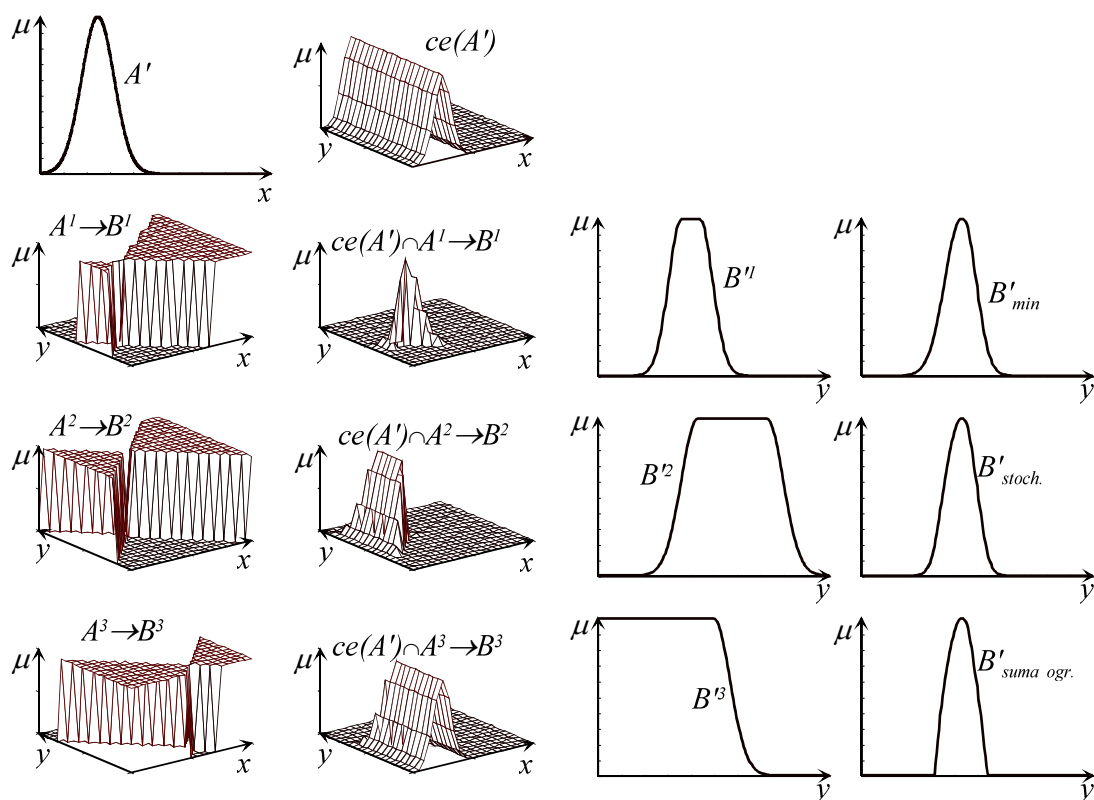
Rys. 2.32. Przykład wnioskowania wg reguły Łukasiewicza - przypadek ogólny.

Rys. 2.33. Przykład wnioskowania wg reguły Zadeha dla zbioru A' typu singleton.

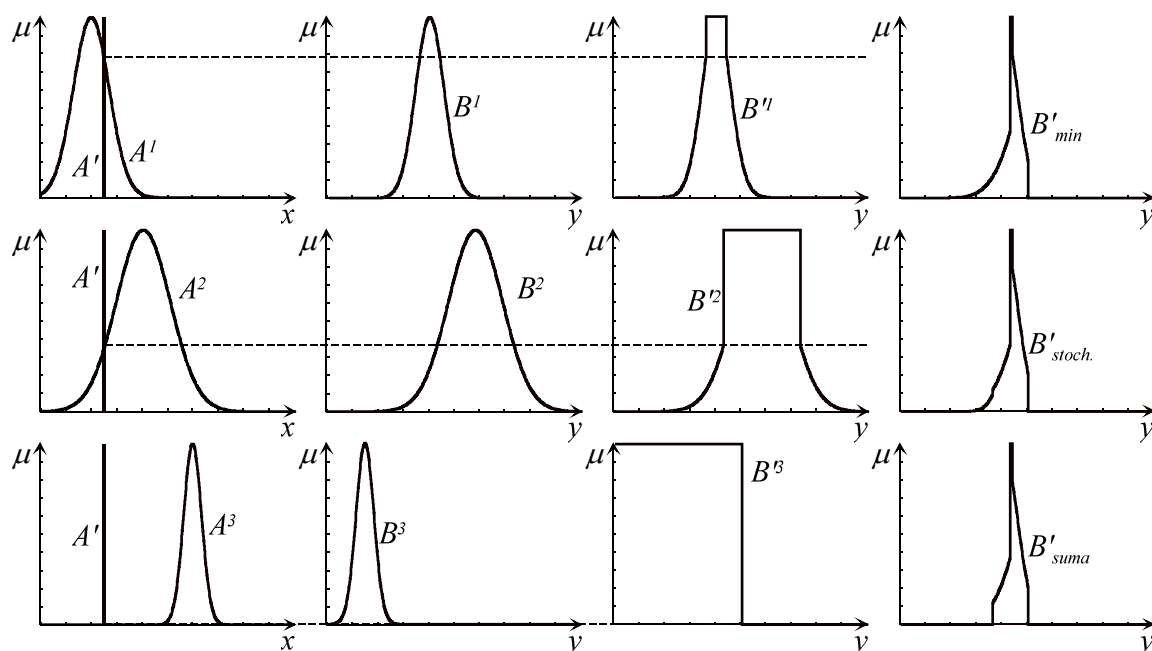
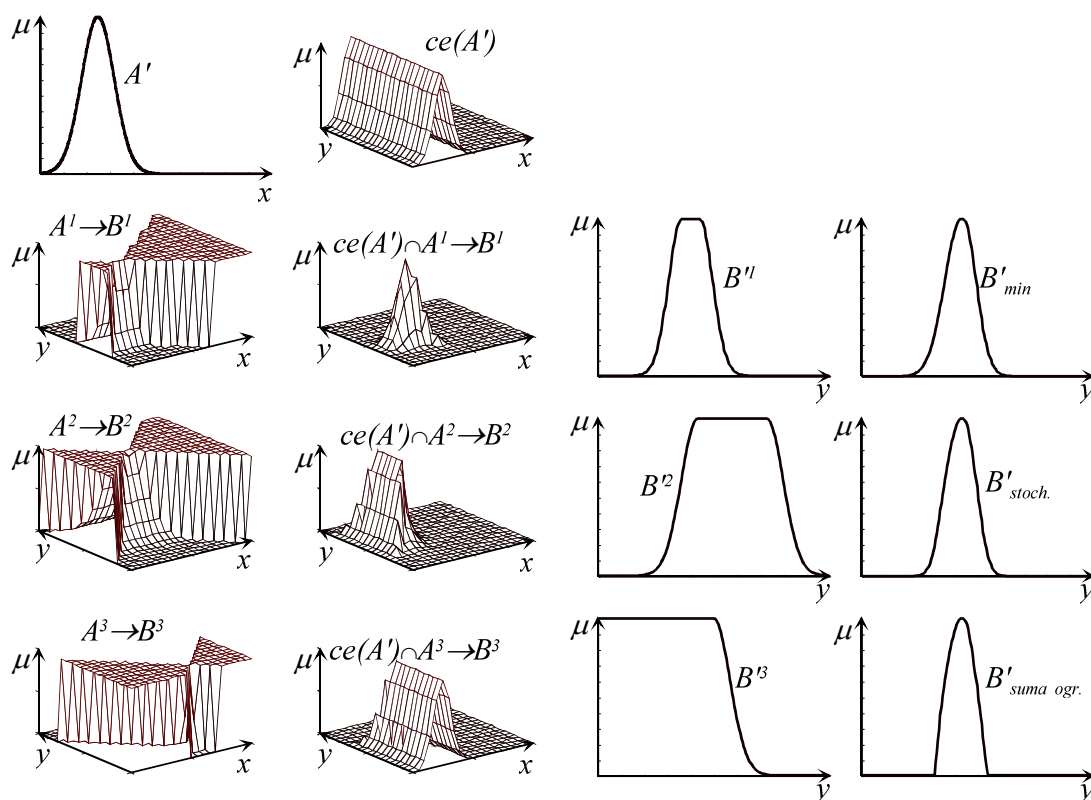
Rys. 2.34. Przykład wnioskowania wg reguły Zadeha - przypadek ogólny.

Rys. 2.35. Przykład wnioskowania wg reguły Goguena dla zbioru A' typu singleton.

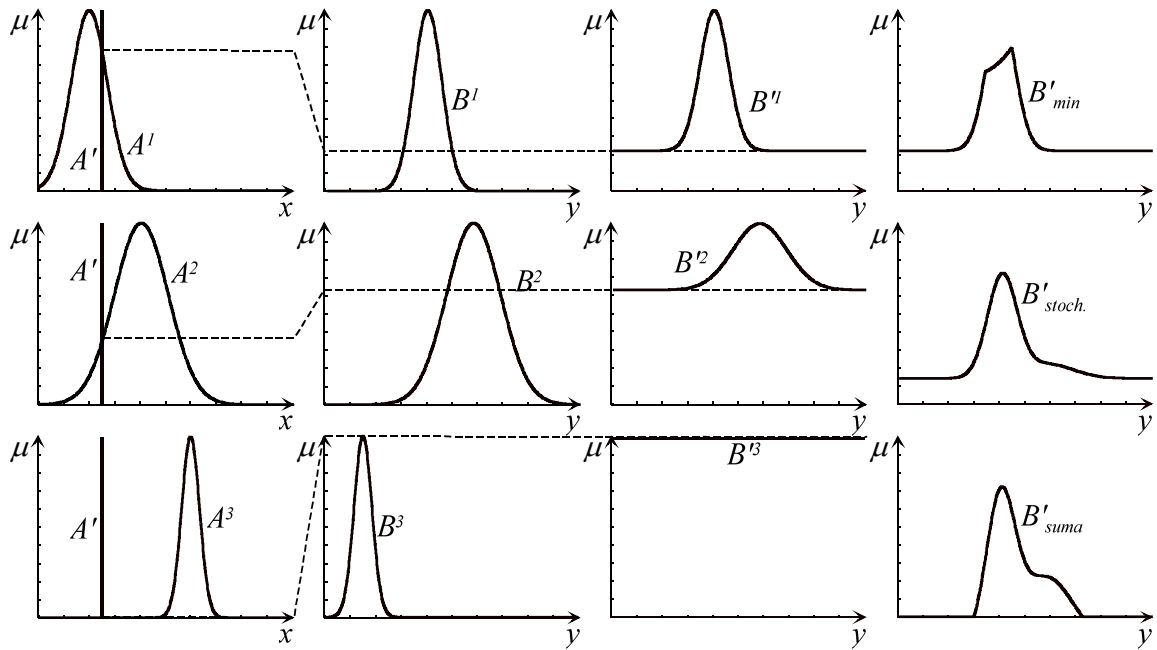
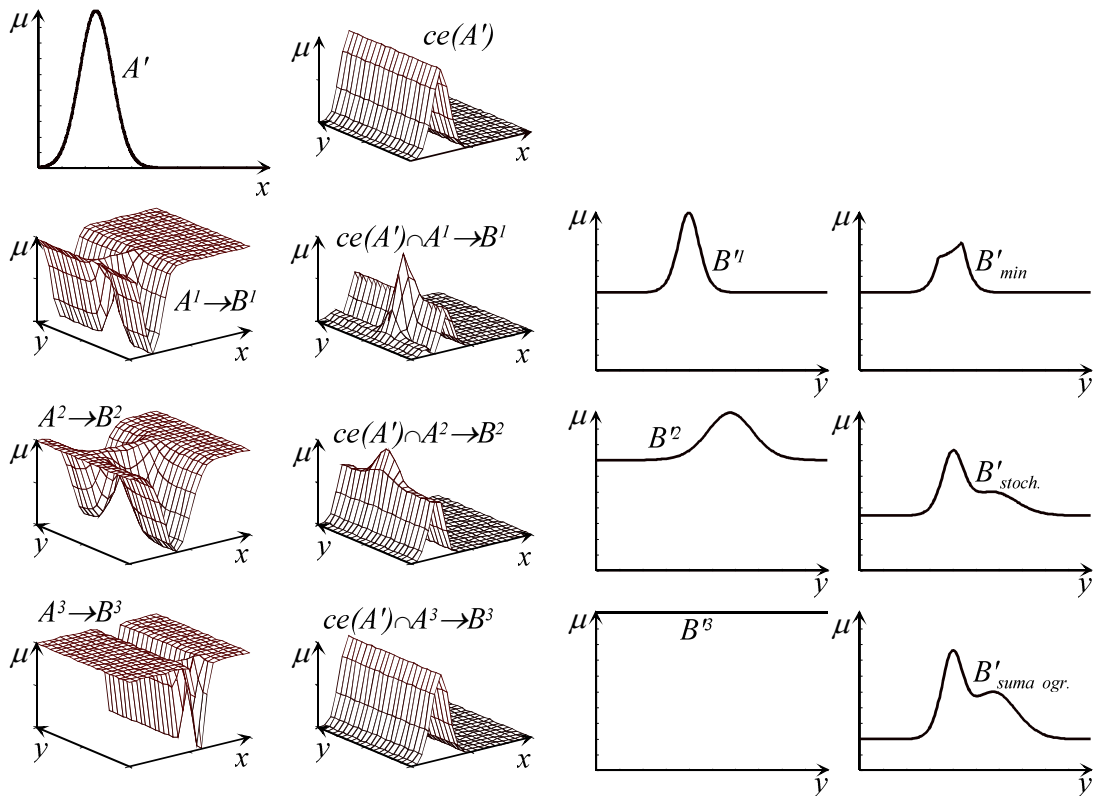
Rys. 2.36. Przykład wnioskowania wg reguły Goguena - przypadek ogólny.

Rys. 2.37. Przykład wnioskowania wg reguły Sharpa dla zbioru A' typu singleton.

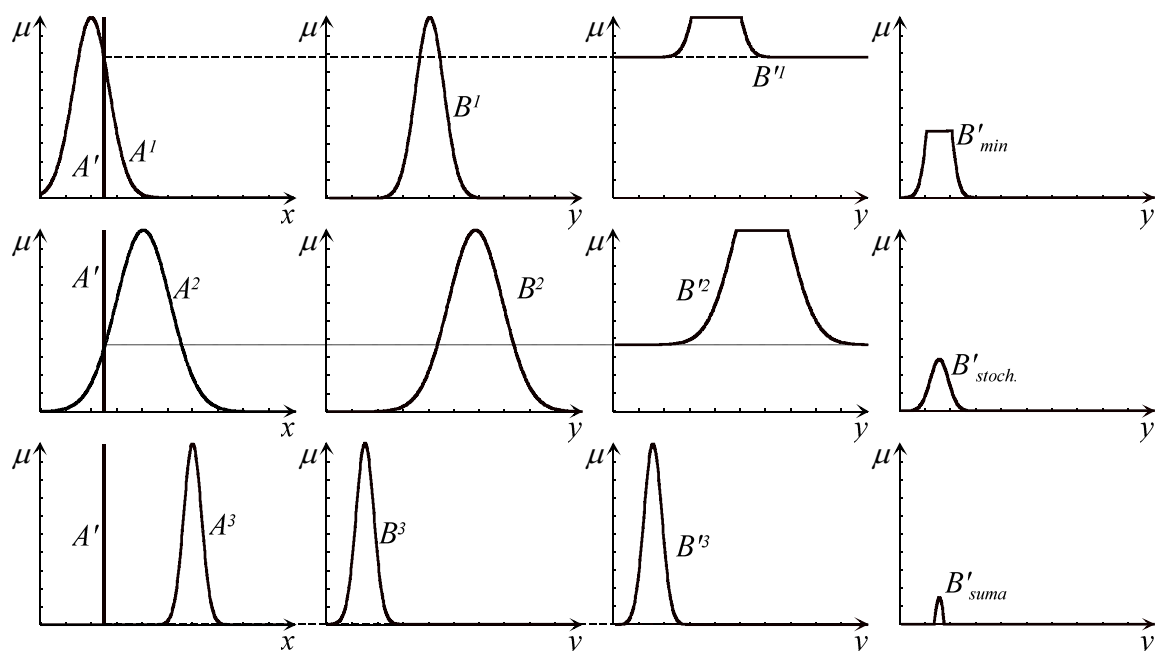
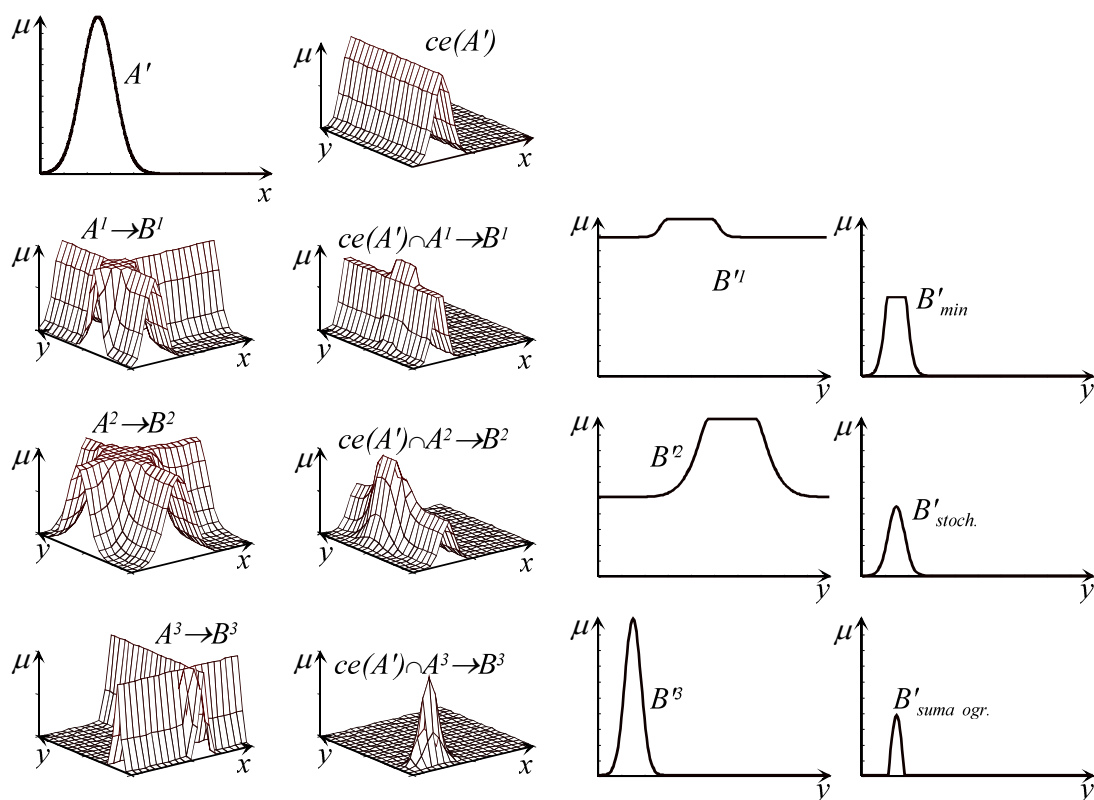
Rys. 2.38. Przykład wnioskowania wg reguły Sharpa - przypadek ogólny.

Rys. 2.39. Przykład wnioskowania wg reguły Gödela dla zbioru A' typu singleton.

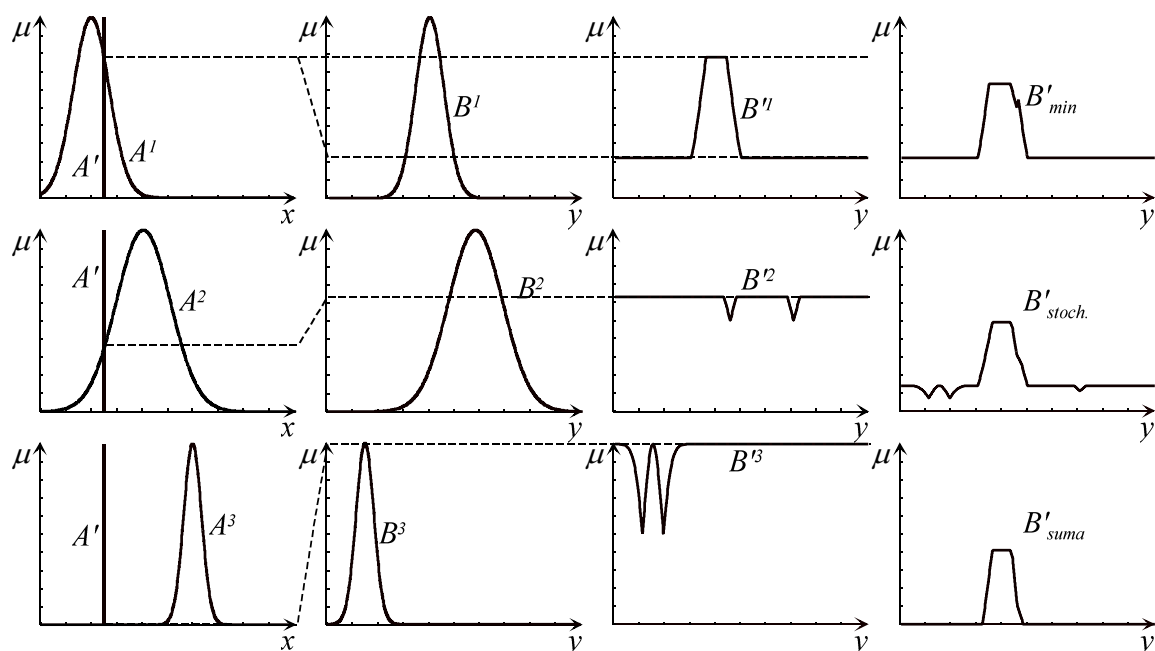
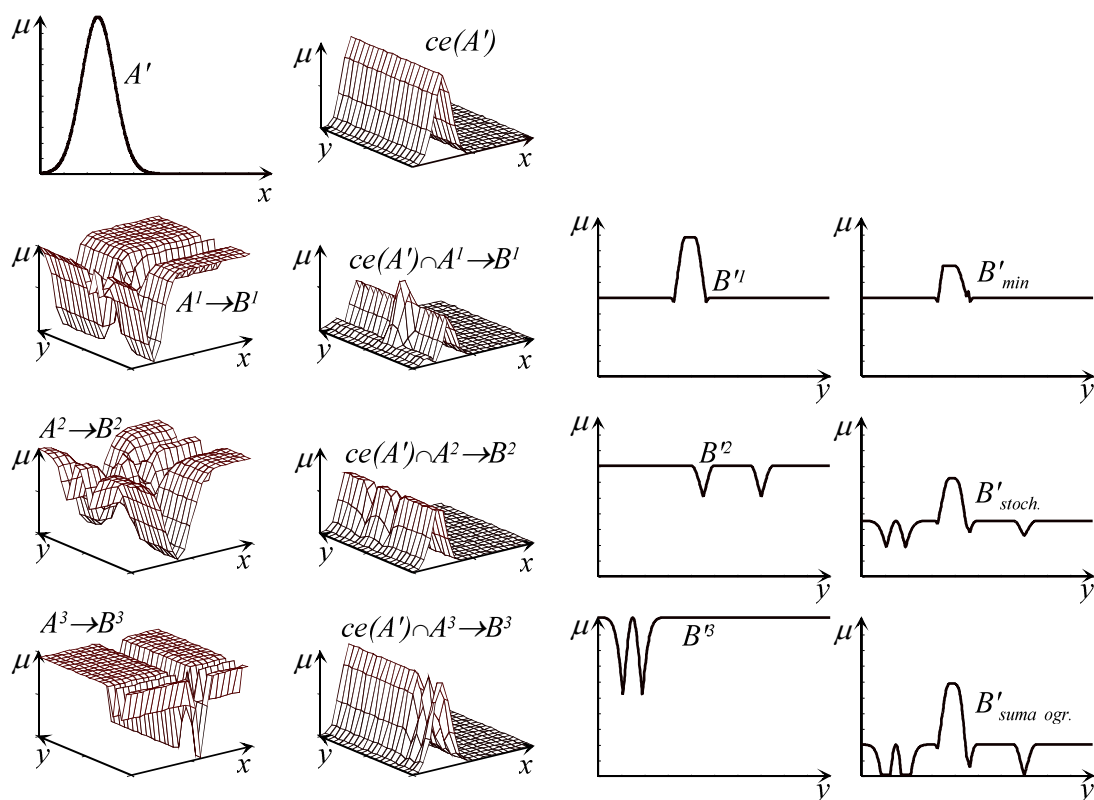
Rys. 2.40. Przykład wnioskowania wg reguły Gödela - przypadek ogólny.

Rys. 2.41. Przykład wnioskowania wg reguły probabilistycznej dla zbioru A' typu singleton.

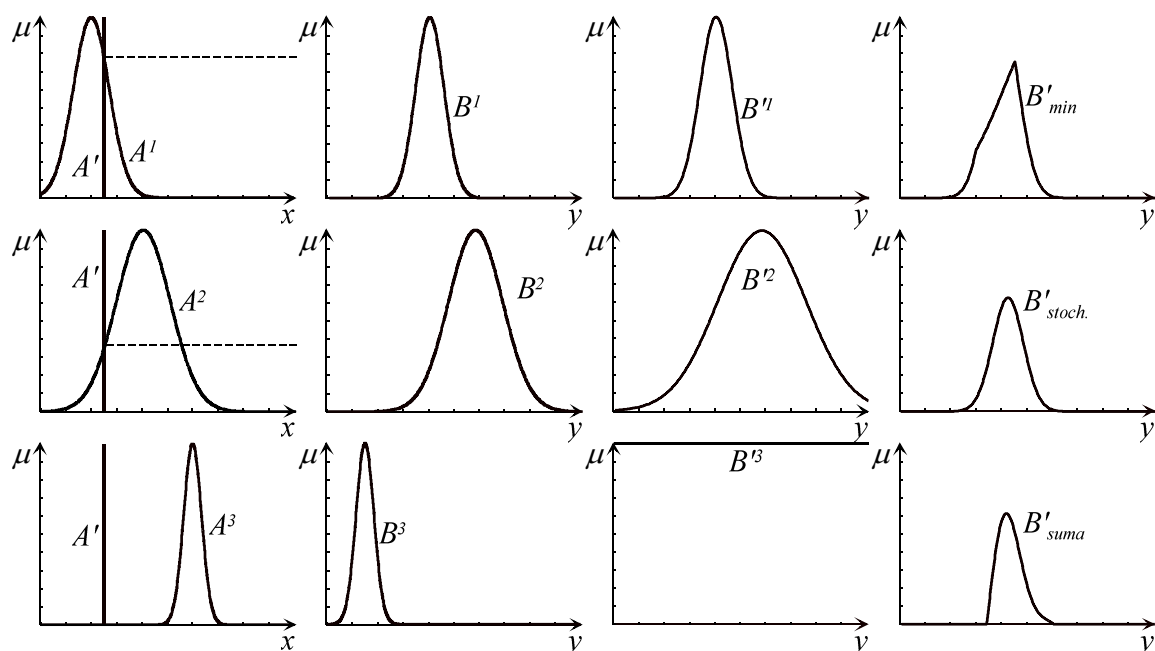
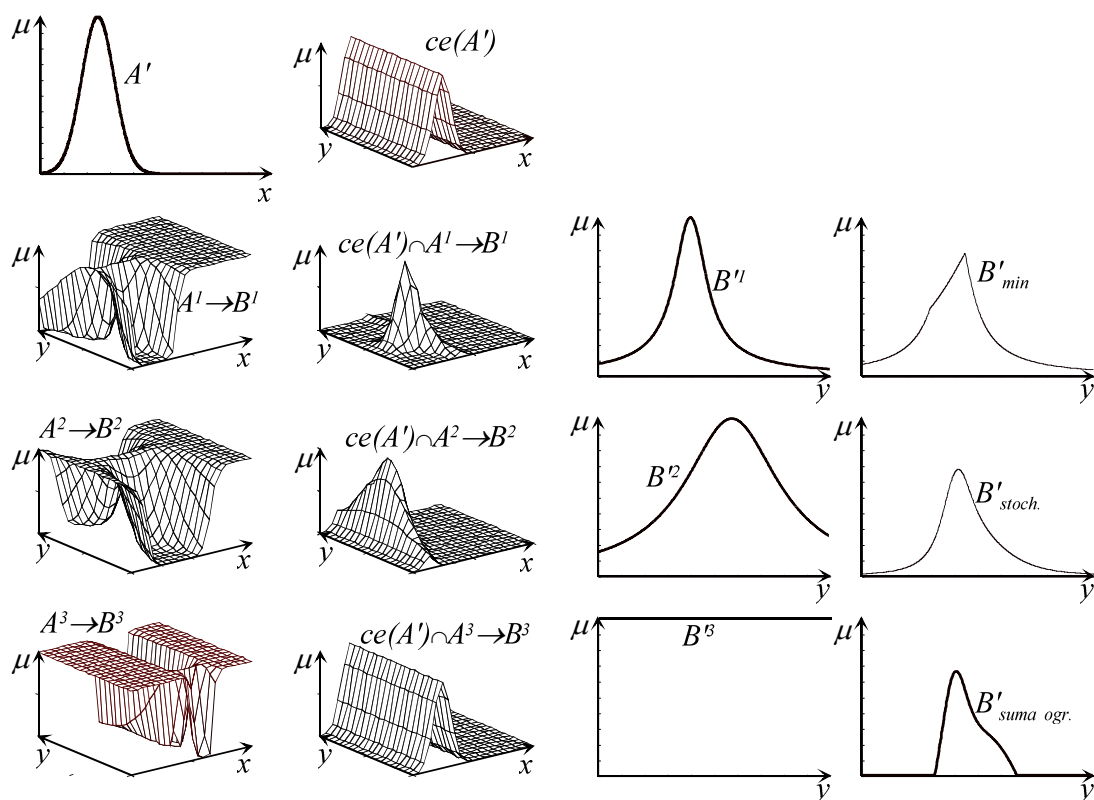
Rys. 2.42. Przykład wnioskowania wg reguły probabilistycznej - przypadek ogólny.

Rys. 2.43. Przykład wnioskowania wg reguły ograniczonej sumy dla zbioru A' typu singleton.

Rys. 2.44. Przykład wnioskowania wg reguły ograniczonej sumy - przypadek ogólny.

Rys. 2.45. Przykład wnioskowania wg Willmotta sumy dla zbioru A' typu singleton.

Rys. 2.46. Przykład wnioskowania wg reguły Willmotta - przypadek ogólny.

Rys. 2.47. Przykład wnioskowania wg reguły Yagera dla zbioru A' typu singleton.

Rys. 2.48. Przykład wnioskowania wg reguły Yagera - przypadek ogólny.

3 REALIZACJA ROZMYTYCH SYSTEMÓW WNIOSKUJĄCYCH ZA POMOCĄ STRUKTUR SIECIOWYCH

W klasycznym rozmytym systemie wnioskującym przetwarzane są zbiory rozmyte. Poza przypadkami trywialnymi jest to zadanie trudne i kosztowne (pracochłonne). Znacznie łatwiej jest przetwarzać wartości rzeczywiste, które mogą być reprezentowane przez wartości napięcia lub natężenia prądu w układach analogowych lub zakodowane binarnie w systemach mikroprocesorowych. W ten sposób działają struktury sieciowe, zarówno sieci neuronowe, jak i rozmyto-neuronowe. Te ostatnie realizują operacje odpowiadające działaniu rozmytych systemów wnioskujących.

3.1 Systemy rozmyto-neuronowe

Systemy rozmyto-neuronowe stanowią odpowiednik tych rozmytych systemów wnioskujących, których wejścia i wyjścia operują na wartościach rzeczywistych. Ich struktura realizuje proces, za który w tradycyjnym systemie są odpowiedzialne niezależne bloki funkcjonalne: rozmywania, wnioskowania i wyostrażania oraz baza reguł.

Rozmywanie jest operacją, która odwzorowuje wartość rzeczywistą $\bar{x}$ na zbiór rozmyty A' . Zbiór ten będzie następnie brał udział w procesie przybliżonego wnioskowania (p. 2.3). Najczęściej stosuje się rozmywanie typu *singleton*. Zbiór A' ma wtedy postać

$$\mu_{A'}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \\ 0 & \text{jeżeli } \mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie $\bar{\mathbf{x}}$ oznacza wektor wejściowy o „ostrych” (nie rozmytych) wartościach.

Dla rozmywania określonego wyrażeniem (3.1) wzór (2.77) przyjmuje postać

$$\mu_{B^k}(y) = \mu_{A^k \rightarrow B^k}(\bar{\mathbf{x}}, y) \quad (3.2)$$

W wyniku rozmytego wnioskowania otrzymujemy zbiór rozmyty B' . Chcąc uzyskać na wyjściu wartość „ostrą” (nie rozmytą), stosuje się odpowiednią metodę wyostrażania. Jednym z podstawowych sposobów wyostrażania jest metoda środka obszaru (*COA – Center Of Area*), zdefiniowana jako

$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot \mu_{B'}(y) dy}{\int \mu_{B'}(y) dy} \quad (3.3)$$

W systemach rozmyto-neuronowych wykorzystuje się metodę COA, ograniczając się jednak jedynie do tych punktów $\bar{y}^k$ w przestrzeni $\mathbf{Y}$, w których funkcje przynależności odpowiednich zbiorów rozmytych B^k osiągają maksimum, czyli

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \mu_{B^k}(\bar{y}^k)}{\sum_{k=1}^N \mu_{B^k}(\bar{y}^k)} \quad (3.4)$$

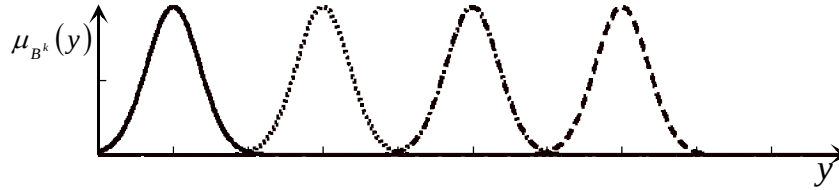
Zakłada się ponadto, że zbiory rozmyte B^k są normalne, tzn.

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.5)$$

oraz, że zbiory te nie pokrywają się wzajemnie, czyli

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) \approx 0 \quad (3.6)$$

gdzie $j, k = 1 \dots N$ i $j \neq k$. Rysunek 3.1 przedstawia przykład takich zbiorów.



Rys. 3.1. Przykładowe zbiory rozmyte spełniające założenie (3.6).

3.2 Struktury o modelach lingwistycznych typu Mamdaniego

Przedstawiane w literaturze i stosowane w praktyce systemy rozmyto-neuronowe dokonują wnioskowania według reguł typu minimum (reguła Mamdaniego) lub iloczyn (reguła Larsena). Realizują one tak zwane podejście konstruktywne.

3.2.1 Reguła Mamdaniego

Jeśli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* (3.1) zostanie podstawiona definicja implikacji Mamdaniego (2.81), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \min[\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}), \mu_{B^k}(y)] \quad (3.7)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \min[\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}), \mu_{B^k}(\bar{y}^k)] \quad (3.8)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \quad (3.9)$$

Na podstawie założenia (3.6) przyjmuje się, że

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) > \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \quad (3.10)$$

gdzie $j \neq k$. Zatem przy wykorzystaniu metody agregacji przedstawionej wzorem (2.79) otrzymujemy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \quad (3.11)$$

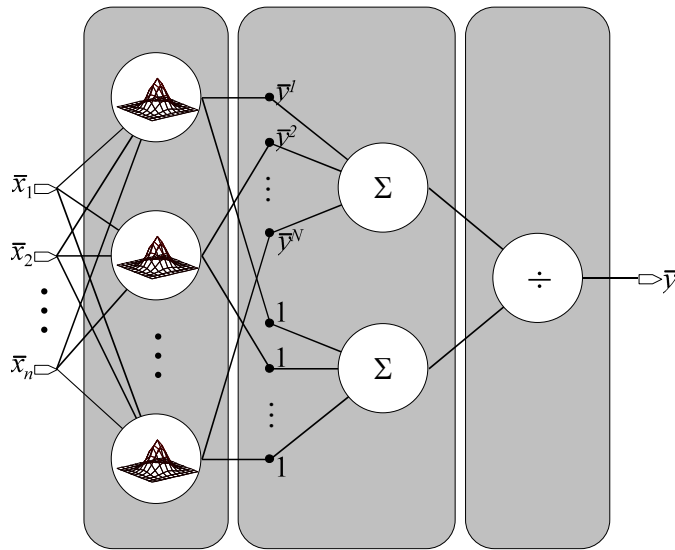
czyli

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \quad (3.12)$$

Uzyskaną w ten sposób funkcję przynależności (3.12) zbioru rozmytego B' wystarczy podstawić do wzoru wyrażającego operację wyostrażania (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego na podstawie reguły implikacji typu minimum

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \mu_{A^k}(\bar{x})}{\sum_{k=1}^N \mu_{A^k}(\bar{x})} \quad (3.13)$$

Rysunek 3.2 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.13).



Rys. 3.2. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego.

3.2.2 Reguła Larsena

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Larsena (2.82), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \cdot \mu_{B^k}(y) \quad (3.14)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \cdot \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \quad (3.15)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \quad (3.16)$$

Na podstawie założenia (3.6) przyjmuje się, że

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) > \mu_{B'^j}(\bar{y}^k) \quad (3.17)$$

gdzie $j \neq k$, skąd przy wykorzystaniu metody agregacji przedstawionej wzorem (2.79) otrzymujemy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \mu_{B'^k}(\bar{y}^k) \quad (3.18)$$

czyli

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \quad (3.19)$$

Funkcję przynależności wynikowego zbioru rozmytego B' opisanego przez (3.19) wystarczy podstawić do wzoru na operację wyostrażania (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego na podstawie reguły implikacji typu minimum

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \mu_{A^k}(\bar{x})}{\sum_{k=1}^N \mu_{A^k}(\bar{x})} \quad (3.20)$$

Wyrażenie (3.20) jest identyczne z otrzymanym przy zastosowaniu reguły Mamdaniego (3.13). Wzór ten oraz wynikającą z niego strukturę przedstawili Lin i Lee w pracy [31], a później Wang w pracy [62]. Wykorzystali oni w tym celu mniej ogólną metodę wyostrażania zwaną metodą średnią centrów (ang. *center average defuzzification*) [49] lub wysokości (ang. *hight defuzzification*) [11].

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \mu_{B^k}(\bar{y}^k)}{\sum_{k=1}^N \mu_{B^k}(\bar{y}^k)} \quad (3.21)$$

Wzór (3.21) przedstawia sposób wyostrzania, który jest szczególnym przypadkiem metody wyrażonej wzorem (3.4), przy założeniu (3.6) i agregacji (2.80).

3.3 Struktury o modelach lingwistycznych typu logicznego

Wnioskowanie według destrukcyjnych modeli lingwistycznych było do tej pory niemal całkowicie pomijane w literaturze. Podstawowe informacje z tego zakresu można znaleźć w pracach Yagera i Fileva [66] i [12]. Artykuł [12] przedstawia rozważania na temat uproszczonego wnioskowania według modelu destrukcyjnego, prowadzące do wzorów zbliżonych do uzyskanych poniżej dla reguły binarnej. W książce [11] rozpatrywano regułę wnioskowania według Gödela, wykorzystując operację iloczynu do połączenia wyników wnioskowania dla poszczególnych reguł. W artykule [10] Czogała zasygnalizował możliwość zastosowania wnioskowania według destrukcyjnych modeli lingwistycznych w sterownikach rozmytych.

3.3.1 Reguła binarna (Kleenego-Dienes, Dienes-Reschera)

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji binarnej (2.87), otrzymamy

$$\mu_{B^k}(y) = \max[1 - \mu_{A^k}(\bar{x}), \mu_{B^k}(y)] \quad (3.22)$$

czyli

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = \max[1 - \mu_{A^k}(\bar{x}), \mu_{B^k}(\bar{y}^k)] \quad (3.23)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.24)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) \quad (3.25)$$

Zbiór B' uzyskuje się poprzez agregację zbiorów B^k zgodnie ze wzorem (2.84). Ponieważ każda T -norma jest przemienne (2.29) i łączna (2.30), można to przedstawić w postaci

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T \left[\mu_{B^k}(\bar{y}^k), \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \right] \quad (3.26)$$

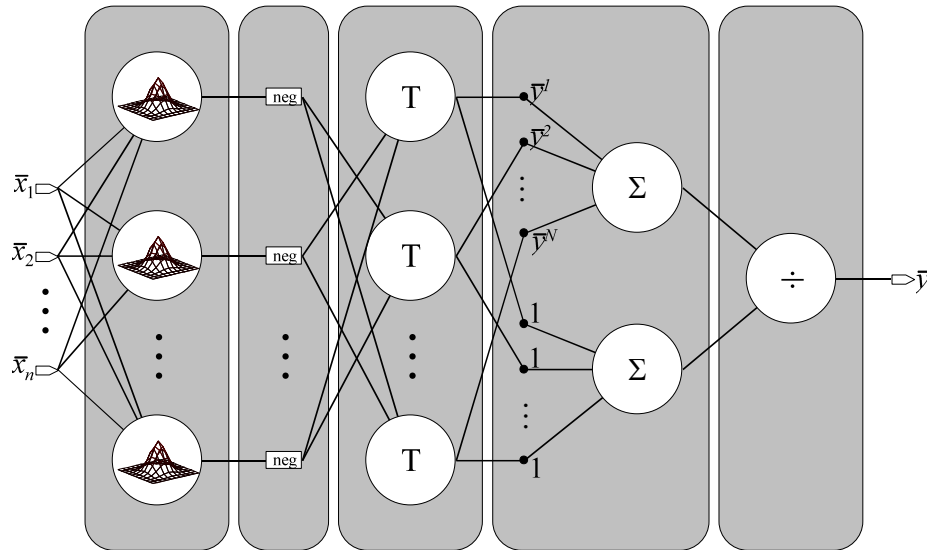
skąd na podstawie wzorów (3.24) i (3.25), mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \quad (3.27)$$

Uzyskaną postać funkcji przynależności zbioru wynikowego B' wyrażoną wzorem (3.27) można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego korzystającego z reguły implikacji typu binarnego

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]}{\sum_{k=1}^N \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]} \quad (3.28)$$

Rysunek 3.3 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.28).



Rys. 3.3. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej.

Jeśli wykorzystano agregację realizowaną przez operację minimum (2.85), opis systemu przyjmie postać

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]} \quad (3.29)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A_j}(\bar{x})) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A_j}(\bar{x}))} \quad (3.30)$$

3.3.2 Reguła Łukasiewicza

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Łukasiewicza (2.88), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \min[1 - \mu_{A^k}(\bar{x}) + \mu_{B^k}(y)] \quad (3.31)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \min[1 - \mu_{A^k}(\bar{x}) + \mu_{B^k}(\bar{y}^k)] \quad (3.32)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.33)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) \quad (3.34)$$

Agregację zbiorów B'^k realizuje się zgodnie ze wzorem (2.84), który można przedstawić również w postaci (3.26), skąd na podstawie (3.33) i (3.34), mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \frac{1}{T} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \quad (3.35)$$

Otrzymaną funkcję przynależności zbioru wynikowego B' , wyrażoną wzorem (3.35), można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by uzyskać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego opartego z regułą implikacji Łukasiewicza

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \frac{1}{T} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{T} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]} \quad (3.36)$$

Wzór (3.36) jest identyczny jak w przypadku zastosowania reguły binarnej (3.28), zatem także struktura wynikająca z niego będzie taka sama jak przedstawiona na rysunku 3.3. W przypadku tym jeśli jako agregację zastosujemy operację minimum (2.85), również otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]} \quad (3.37)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), uzyskamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x}))} \quad (3.38)$$

3.3.3 Reguła typu max-min (Zadeha)

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Zadeha (2.89), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \max \{ \min [\mu_{A^k}(\bar{x}), \mu_{B^k}(y)], 1 - \mu_{A^k}(\bar{x}) \} \quad (3.39)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \max \{ \min [\mu_{A^k}(\bar{x}), \mu_{B^k}(\bar{y}^k)], 1 - \mu_{A^k}(\bar{x}) \} \quad (3.40)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \max [\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})] \quad (3.41)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) \quad (3.42)$$

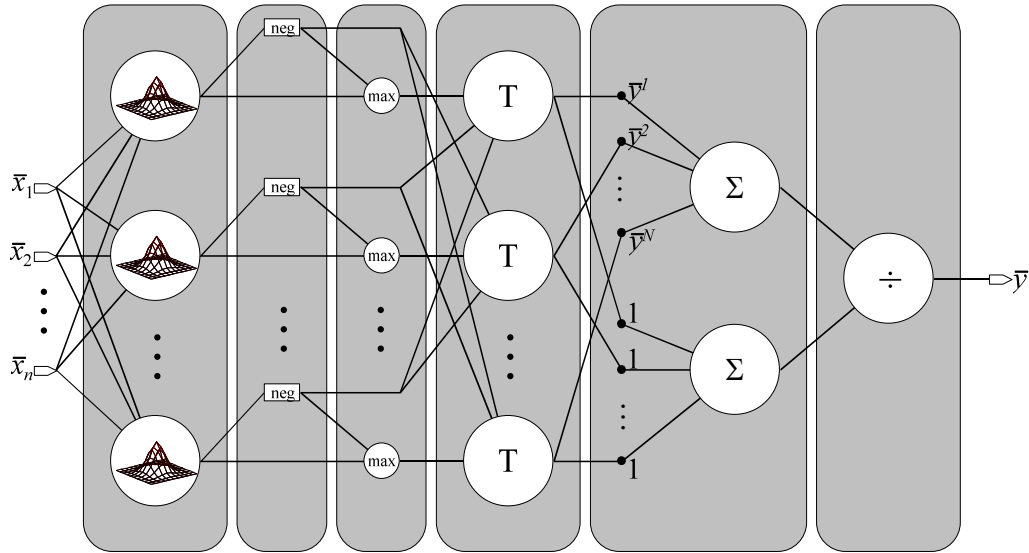
Agregację zbiorów B'^k realizujemy zgodnie z wyrażeniem (2.84), przedstawionym w postaci wzoru (3.26), skąd na podstawie (3.41) i (3.42), mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\} \quad (3.43)$$

Uzyskaną funkcję przynależności zbioru wynikowego B' , wyrażoną wzorem (3.43), można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z regułą implikacji Zadeha

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}} \quad (3.44)$$

Rysunek 3.4 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.44).



Rys. 3.4. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha.

Jeśli wykorzystano agregację realizowaną przez operację minimum (2.85), otrzymujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}}{\sum_{k=1}^N \min \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}} \quad (3.45)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})] \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right]}{\sum_{k=1}^N \left[\max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})] \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right]} \quad (3.46)$$

3.3.4 Reguła probabilistyczna

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji stochastycznej (2.93), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \min[1, 1 - \mu_{A^k}(\bar{x}) + \mu_{A^k}(\bar{x}) \cdot \mu_{B^k}(y)] \quad (3.47)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \min[1, 1 - \mu_{A^k}(\bar{x}) + \mu_{A^k}(\bar{x}) \cdot \mu_{B^k}(\bar{y}^k)] \quad (3.48)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.49)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) \quad (3.50)$$

Agregację zbiorów B'^k realizujemy zgodnie ze wzorem (2.84), przedstawionym w postaci (3.26), skąd na podstawie (3.49) i (3.50), mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \frac{T}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \quad (3.51)$$

Otrzymaną funkcję przystosowania zbioru wynikowego B' , wyrażoną wzorem (3.51), można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by uzyskać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego korzystającego z reguły implikacji stochastycznej

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \frac{T}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]}{\sum_{k=1}^N \frac{T}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]} \quad (3.52)$$

Wzór (3.52) jest identyczny jak w przypadku zastosowania reguły binarnej (3.28) i Łukasiewicza (3.36), zatem również struktura będzie identyczna jak przedstawiona na rysunku 3.3. W tym przypadku również przy agregacji za pomocą operacji minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})]} \quad (3.53)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x}))} \quad (3.54)$$

3.3.5 Reguła Willmotta

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Willmotta (2.96), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \min[\max(1 - \mu_{A^k}(\bar{x}), \mu_{B^k}(y)), \max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{B^k}(y), \min(\mu_{B^k}(y), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})))] \quad (3.55)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \min[\max(1 - \mu_{A^k}(\bar{x}), \mu_{B^k}(\bar{y}^k)), \max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{B^k}(\bar{y}^k), \min(\mu_{B^k}(\bar{y}^k), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})))] \quad (3.56)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})] \quad (3.57)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) \quad (3.58)$$

Agregację zbiorów B'^k realizujemy zgodnie z wyrażeniem (2.84), przedstawionym w postaci wzoru (3.26), skąd na podstawie (3.57) i (3.58), mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\} \quad (3.59)$$

Uzyskaną funkcję przynależności zbioru wynikowego B' , wyrażoną wzorem (3.59), można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z regułą implikacji Willmotta

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}} \quad (3.60)$$

Wzór (3.60) jest identyczny jak w przypadku zastosowania reguły Zadeha (3.44), zatem identyczna będzie również struktura przedstawiona na rysunku 3.4. W tym przypadku również przy agregacji za pomocą operacji minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}}{\sum_{k=1}^N \min \left\{ \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})], \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right\}} \quad (3.61)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})] \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right]}{\sum_{k=1}^N \left[\max[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})] \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N [1 - \mu_{A^j}(\bar{x})] \right]} \quad (3.62)$$

3.3.6 Reguła ograniczonej sumy

W przypadku, gdy do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji ograniczonej sumy (2.94), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \min[1, \mu_{A^k}(\bar{x}) + \mu_{B^k}(y)] \quad (3.63)$$

czyli

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = \min[1, \mu_{A^k}(\bar{x}) + \mu_{B^k}(\bar{y}^k)] \quad (3.64)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.65)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^j}(\bar{x}) \quad (3.66)$$

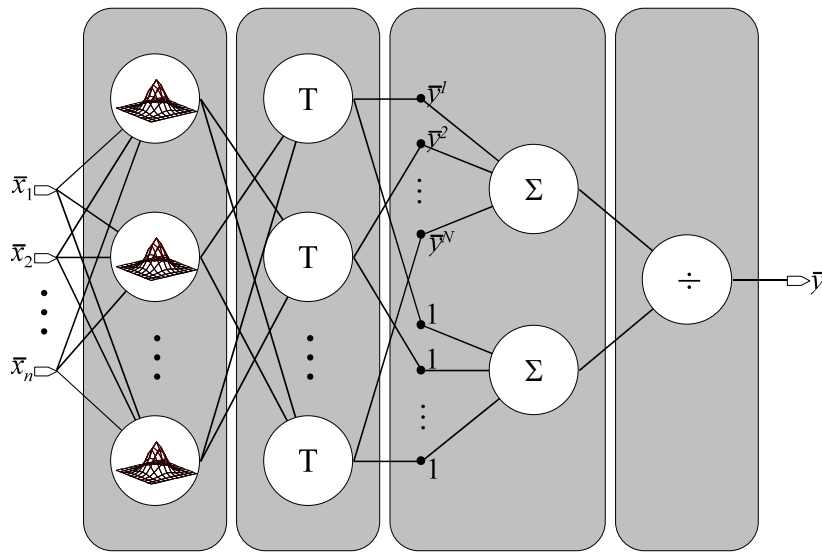
Zbiór B' uzyskuje się poprzez agregację zbiorów B'^k zgodnie ze wzorem (2.84), przedstawionym w postaci (3.26), skąd na podstawie (3.65) i (3.66), mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \frac{\sum_{j=1, j \neq k}^N \mu_{A^j}(\bar{x})}{\sum_{j=1}^N \mu_{A^j}(\bar{x})} \quad (3.67)$$

Wyrażenie (3.67) określające zbiór rozmyty B' można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego działającego na podstawie reguły implikacji ograniczonej sumy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \frac{\sum_{j=1, j \neq k}^N \mu_{A^j}(\bar{x})}{\sum_{j=1}^N \mu_{A^j}(\bar{x})}}{\sum_{k=1}^N \frac{\sum_{j=1, j \neq k}^N \mu_{A^j}(\bar{x})}{\sum_{j=1}^N \mu_{A^j}(\bar{x})}} \quad (3.68)$$

Rysunek 3.5 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.68).



Rys. 3.5. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy.

Wykorzystując agregację realizowaną za pomocą operacji minimum (2.85), otrzymujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} (\mu_{A_j}(\bar{x}))}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} (\mu_{A_j}(\bar{x}))} \quad (3.69)$$

natomiast realizując agregację na podstawie operacji iloczynu (2.86), mamy następujący opis systemu

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mu_{A_j}(\bar{x}) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mu_{A_j}(\bar{x})} \quad (3.70)$$

3.3.7 Reguła Goguena

Jeśli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Goguena (2.90), otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \begin{cases} \min \left[1, \frac{\mu_{B^k}(y)}{\mu_{A^k}(\bar{x})} \right] & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \begin{cases} \min \left[1, \frac{\mu_{B^k}(\bar{y}^k)}{\mu_{A^k}(\bar{x})} \right] & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.72)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.73)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

co wygodniej można zapisać w postaci

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{=}{*} 0 \quad (3.75)$$

gdzie symbol $\overset{=}{*}$ oznacza dwuelementowy operator zdefiniowany następująco

$$a \overset{=}{*} b = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } a = b \\ 0 & \text{jeżeli } a \neq b \end{cases} \quad (3.76)$$

Z agregacji zbiorów B'^k przedstawionej w postaci wzoru (3.26), na podstawie (3.73) i (3.75) otrzymujemy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{=}{*} 0 \right) \quad (3.77)$$

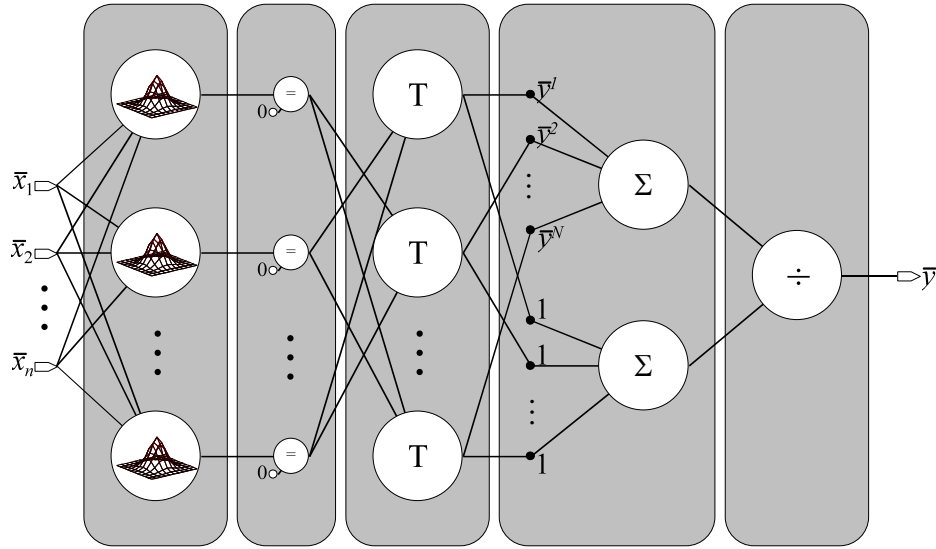
Warto zauważyć, że dla zbiorów rozmytych A^k opisanych m.in. przez gaussowską funkcję przynależności (2.8), ich iloczyn kartezjański (2.17) lub funkcję elipsoidalną (2.22) zachodzi $\mu_{A^k}(\bar{x}) > 0$ dla każdego $\bar{x}$, czyli $\mu_{B'}(\bar{y}^k) = 0$. Konstruowanie systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem Goguena, wykorzystując jedną z wymienionych funkcji przynależności jest bezcelowe, o ile nie przyjmie się w miejsce operacji (3.76), równości przybliżonej

$$a \overset{\approx}{*} b = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } |a - b| < \varepsilon \\ 0 & \text{jeżeli } |a - b| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.78)$$

W ogólnym przypadku wzór (3.77) określający zbiór rozmyty B' można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego działającego na podstawie reguły implikacji Goguena

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{=}{*} 0 \right)}{\sum_{k=1}^N T_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{=}{*} 0 \right)} \quad (3.79)$$

Rysunek 3.6 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.79).



Rys. 3.6. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Goguena.

W strukturze przedstawionej na rysunku 3.6 element oznaczony symbolem „=” realizuje operację $\bar{*}$ określoną przez (3.76).

Wykorzystując agregację realizowaną za pomocą operacji minimum (2.85), otrzymujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \bar{*} 0 \right)}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \bar{*} 0 \right)} \quad (3.80)$$

natomiast realizując agregację na podstawie operacji iloczynu (2.86), mamy następujący opis systemu

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \bar{*} 0 \right) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \bar{*} 0 \right)} \quad (3.81)$$

3.3.8 Reguła Sharpa

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Sharpa (2.91), to otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mu_{B^k}(y) \\ 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) > \mu_{B^k}(y) \end{cases} \quad (3.82)$$

czyli

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \\ 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) > \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \end{cases} \quad (3.83)$$

co, przy wykorzystaniu założenia (3.5), sprowadza się do

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.84)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$. Zatem

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

lub korzystając z (3.76)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \quad (3.86)$$

Z agregacji zbiorów B^k , przedstawionej w postaci wzoru (3.26), na podstawie (3.84) i (3.86) otrzymujemy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right) \quad (3.87)$$

Wyrażenie (3.87) określające zbiór rozmyty B' można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego działającego na podstawie reguły implikacji Sharpa

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)}{\sum_{k=1}^N T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)} \quad (3.88)$$

Wzór (3.88) jest identyczny dla reguły Goguena (3.79), zatem również struktura będzie identyczna jak przedstawiona na rysunku 3.6. W tym przypadku również przy agregacji za pomocą operacji minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)}{\sum_{k=1}^N \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)} \quad (3.89)$$

natomiast realizując agregację na podstawie operacji iloczynu (2.86), mamy następujący opis systemu

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x})^* 0 \right) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x})^* 0 \right)} \quad (3.90)$$

3.3.9 Reguła Gödela

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Gödela (2.92), to otrzymamy

$$\mu_{B^k}(y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) \leq \mu_{B^k}(y) \\ \mu_{B^k}(y) & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) > \mu_{B^k}(y) \end{cases} \quad (3.91)$$

czyli

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) \leq \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \\ \mu_{B^k}(\bar{y}^k) & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{x}) > \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \end{cases} \quad (3.92)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.93)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.94)$$

lub korzystając z (3.76)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^j}(\bar{x})^* 0 \quad (3.95)$$

Z agregacji zbiorów B^k (2.84), przedstawionej w postaci wzoru (3.26), na podstawie (3.93) i (3.95) otrzymujemy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x})^* 0 \right) \quad (3.96)$$

Wzór (3.96) określający zbiór rozmyty B' można podstawić bezpośrednio do wyrażenia (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego działającego na podstawie reguły implikacji Gödela

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) * 0 \right)}{\sum_{k=1}^N T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) * 0 \right)} \quad (3.97)$$

Wzór (3.97) jest identyczny jak w przypadku zastosowania reguły Goguena (3.79) i Sharpa (3.88), zatem również struktura będzie identyczna jak przedstawiona na rysunku 3.6. W tym przypadku również przy agregacji za pomocą operacji minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) * 0 \right)}{\sum_{k=1}^N \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) * 0 \right)} \quad (3.98)$$

natomiast realizując agregację na podstawie operacji iloczynu (2.86), mamy następujący opis systemu

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) * 0 \right) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) * 0 \right)} \quad (3.99)$$

3.3.10 Reguła Yagera

Jeżeli do wzoru (3.2) opisującego funkcję przynależności zbioru B'^k przy rozmywaniu typu *singleton* zostanie podstawiona definicja implikacji Yagera (2.97), to otrzymamy

$$\mu_{B'^k}(y) = \begin{cases} \mu_{B^k}(y)^{\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}})} & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \end{cases} \quad (3.100)$$

czyli

$$\mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \begin{cases} \mu_{B^k}(\bar{y}^k)^{\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}})} & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \end{cases} \quad (3.101)$$

co, korzystając z założenia (3.5) sprowadza się do

$$\mu_{B^k}(\bar{y}^k) = 1 \quad (3.102)$$

Na podstawie założenia (3.6) pomija się wartość $\mu_{B^j}(\bar{y}^k)$, gdy $j \neq k$, skąd

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \end{cases} \quad (3.103)$$

lub korzystając z (3.76)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \quad (3.104)$$

Z agregacji zbiorów B^k (2.84), przedstawionej w postaci wzoru (3.26), na podstawie (3.102) i (3.104) otrzymujemy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right) \quad (3.105)$$

Wyrażenie (3.105) określające zbiór rozmyty B' można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), by otrzymać opis rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego działającego na podstawie reguły implikacji Yagera

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)}{\sum_{k=1}^N T_{j=1, j \neq k}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)} \quad (3.106)$$

Wzór (3.106) jest identyczny jak w przypadku zastosowania reguły Goguena (3.79), Sharpa (3.88) i Gödela (3.97), zatem identyczna będzie również struktura przedstawiona na rysunku 3.6. W tym przypadku również przy agregacji za pomocą operacji minimum (2.85), otrzymamy

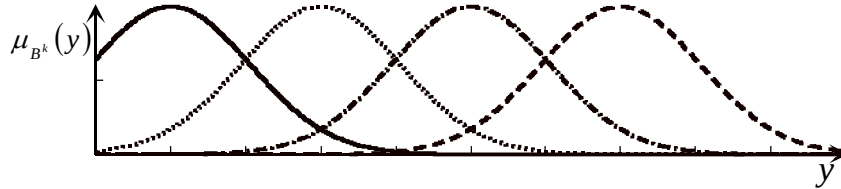
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)}{\sum_{k=1}^N \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* 0 \right)} \quad (3.107)$$

natomiast realizując agregację na podstawie operacji iloczynu (2.86), mamy następujący opis systemu

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left[\bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^{*0} \right) \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^{*0} \right)} \quad (3.108)$$

3.4 Struktury rozszerzone

Jak przedstawiono w punkcie 3.3, w regułach rozmytej implikacji Goguena, Sharpa i Gödela do powstania niepustego zbioru B' konieczne jest aby przynajmniej w jednym punkcie przestrzeni $\mathbf{Y}$ wartości funkcji przynależności wszystkich zbiorów B'^k były większe od 0. W tym przypadku nie można przyjąć założenia (3.6), jak na przykład na rysunku 3.7.



Rys. 3.7. Przykładowe zbiory rozmyte nie spełniające założenia (3.6).

Poniżej zostaną przedstawione struktury, które wyprowadzono z pominięciem założenia (3.6), więc uwzględniające pewne cechy kształtu zbiorów rozmytych występujących w następnikach reguł. W strukturze, która nie podlega już procesowi uczenia, wartości funkcji przynależności zbiorów B'^k są stałe, dlatego wprowadza się parametr $p_{j,k}$ oraz jego dopełnienie wyrażone wzorami

$$p_{j,k} = \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \quad (3.109)$$

$$\sim p_{j,k} = 1 - p_{j,k} = 1 - \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \quad (3.110)$$

Należy jednak pamiętać, że są one funkcjami parametrów wykorzystywanych funkcji przynależności opisujących zbiory B'^k i jako takie nie podlegają doborowi (np. uczeniu).

3.4.1 Reguła Mamdaniego

Wartość $\mu_{B'^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji Mamdaniego (2.81) jest wyrażona przez (3.9), natomiast

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \min[\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}), \mu_{B^j}(\bar{y}^k)] \quad (3.111)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \min[\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}), p_{j,k}] \quad (3.112)$$

Każda S -norma jest przemienne (2.36) i łączna (2.37), zatem wzór (2.79) opisujący agregację można przedstawić w postaci

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = S\left[\mu_{B^k}(\bar{y}^k), \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mu_{B^j}(\bar{y}^k)\right] \quad (3.113)$$

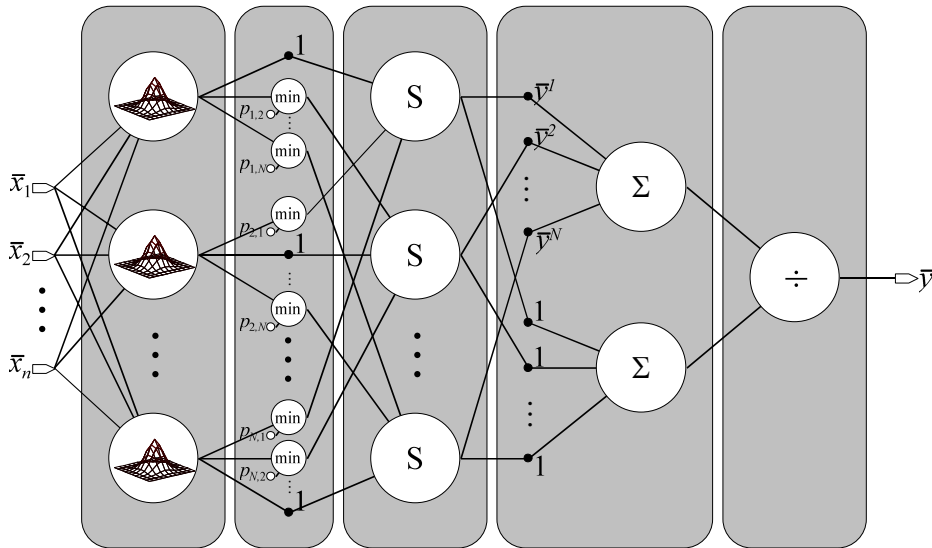
skąd, na podstawie (3.9) i (3.112) mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = S\left[\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}), \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}), p_{j,k})\right] \quad (3.114)$$

Tak otrzymaną funkcję przynależności (3.114) zbioru B' można podstawić bezpośrednio do (3.4), uzyskując wzór opisujący rozszerzony rozmyto-neuronowy system wnioskujący z wnioskowaniem typu Mamdaniego.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot S\left[\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}), \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}), p_{j,k})\right]}{\sum_{k=1}^N S\left[\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}), \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}), p_{j,k})\right]} \quad (3.115)$$

Rysunek 3.8 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.115).



Rys. 3.8. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację maksimum (2.80), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \max \left\{ \mu_{A^k}(\bar{x}), \max_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [\min(\mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k})] \right\}}{\sum_{k=1}^N \max \left\{ \mu_{A^k}(\bar{x}), \max_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} [\min(\mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k})] \right\}} \quad (3.116)$$

3.4.2 Reguła Larsena

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji Larsena (2.82) jest wyrażona przez (3.16), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \cdot \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \quad (3.117)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^k}(\bar{x}) \cdot p_{j,k} \quad (3.118)$$

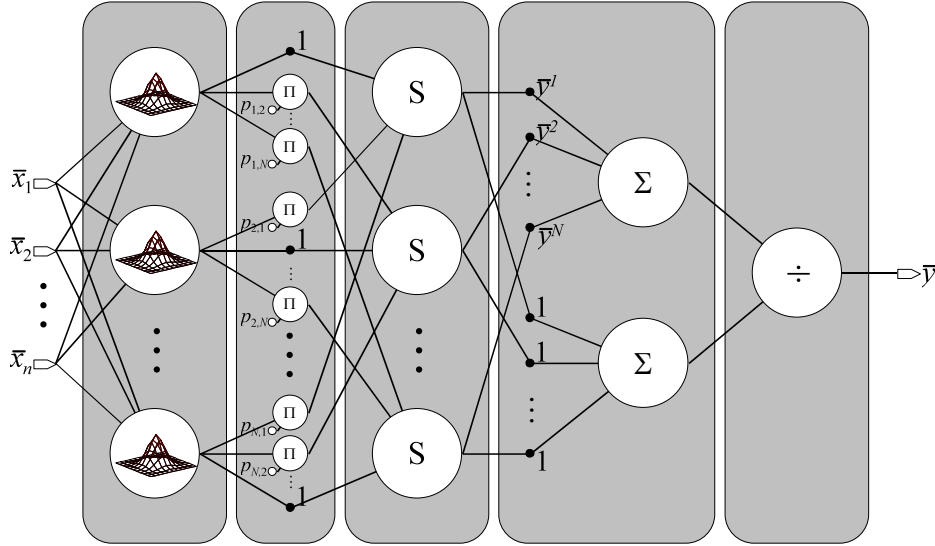
Podstawiając (3.16) i (3.118) do wzoru (3.113) opisującego agregację uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = S \left[\mu_{A^k}(\bar{x}), S_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (\mu_{A^j}(\bar{x}) \cdot p_{j,k}) \right] \quad (3.119)$$

Funkcję przynależności zbioru B' wyrażoną wzorem (3.119) można podstawić bezpośrednio do (3.4), uzyskując następujący opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu Larsena

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot S \left[\mu_{A^k}(\bar{x}), S_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (\mu_{A^j}(\bar{x}) \cdot p_{j,k}) \right]}{\sum_{k=1}^N S \left[\mu_{A^k}(\bar{x}), S_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (\mu_{A^j}(\bar{x}) \cdot p_{j,k}) \right]} \quad (3.120)$$

Rysunek 3.9 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.120).



Rys. 3.9. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Larsena.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację maksimum (2.80), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \max \left[\mu_{A^k}(\bar{x}), \max_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} (\mu_{A^j}(\bar{x}) \cdot p_{j,k}) \right]}{\sum_{k=1}^N \max \left[\mu_{A^k}(\bar{x}), \max_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} (\mu_{A^j}(\bar{x}) \cdot p_{j,k}) \right]} \quad (3.121)$$

3.4.3 Reguła binarna

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji binarnej (2.87) jest wyrażona przez (3.24), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \max[1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), \mu_{B^j}(\bar{y}^k)] \quad (3.122)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \max[1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}] \quad (3.123)$$

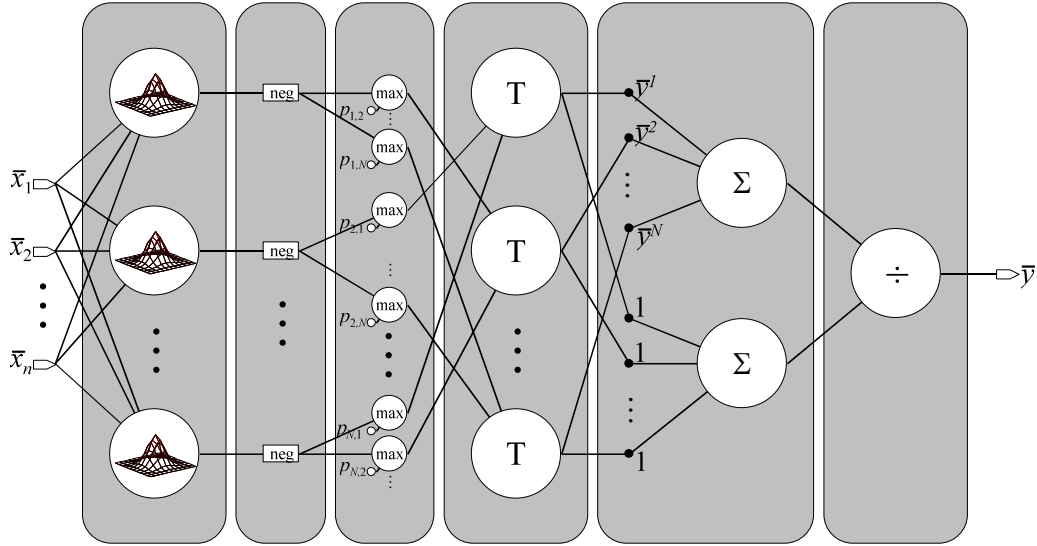
Podstawiając (3.24) i (3.123) do wzoru (3.26) opisującego agregację, mamy

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \frac{1}{N} \max_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}) \quad (3.124)$$

Funkcję przynależności zbioru B' wyrażoną wzorem (3.124) można podstawić bezpośrednio do (3.4), uzyskując następujący opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu binarnego

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k})}{\sum_{k=1}^N T \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k})} \quad (3.125)$$

Rysunek 3.10 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.125).



Rys. 3.10. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{j=1 \dots N, j \neq k} \{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}) \}}{\sum_{k=1}^N \min_{j=1 \dots N, j \neq k} \{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}) \}} \quad (3.126)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{j=1 \dots N, j \neq k} \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k})}{\sum_{k=1}^N \prod_{j=1 \dots N, j \neq k} \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k})} \quad (3.127)$$

3.4.4 Reguła Łukasiewicza

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji wyrażonej przez (2.88) jest określona przez (3.33), natomiast

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \min[1, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) + \mu_{B^j}(\bar{y}^k)] \quad (3.128)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \min[1, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}] \quad (3.129)$$

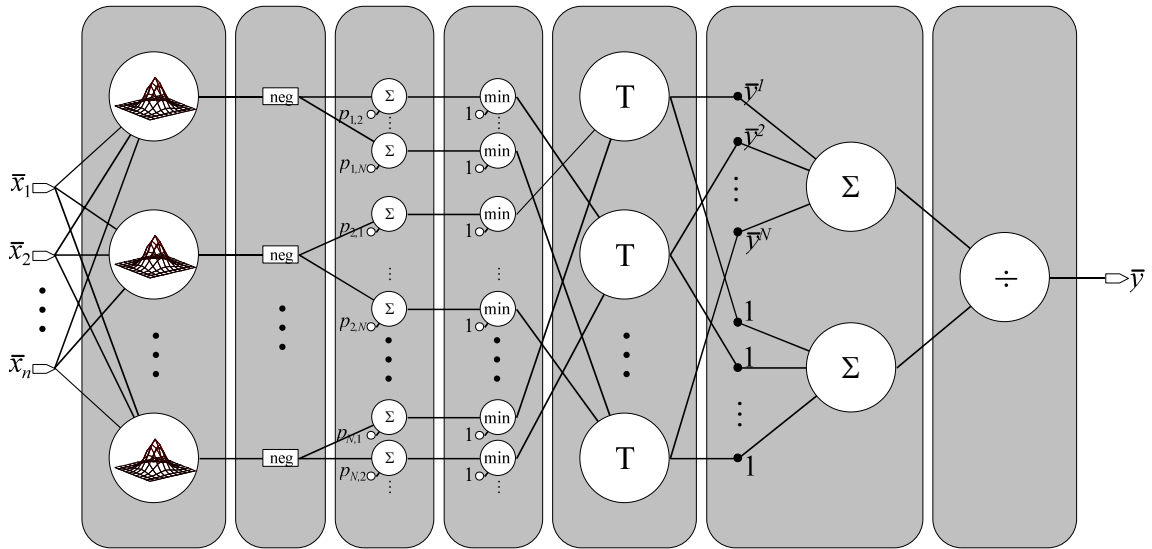
Podstawiając (3.33) i (3.129) do wzoru (3.26) opisującego agregację, uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \frac{N}{T} \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}) \quad (3.130)$$

Funkcję przynależności zbioru B' wyrażoną wzorem (3.130) można podstawić bezpośrednio do (3.4), uzyskując następujący opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu Łukasiewicza.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \frac{N}{T} \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k})}{\sum_{k=1}^N \frac{N}{T} \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k})} \quad (3.131)$$

Rysunek 3.11 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.131).



Rys. 3.11. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Łukasiewicza.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \{ \min(1, 1 - \mu_{A_j}(\bar{x}) + p_{j,k}) \}}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \{ \min(1, 1 - \mu_{A_j}(\bar{x}) + p_{j,k}) \}} \quad (3.132)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min(1, 1 - \mu_{A_j}(\bar{x}) + p_{j,k})}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min(1, 1 - \mu_{A_j}(\bar{x}) + p_{j,k})} \quad (3.133)$$

3.4.5 Reguła Zadeha

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji określonej przez (2.89) jest wyrażona przez (3.41), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \max \{ \min[\mu_{A_j}(\bar{x}), \mu_{B^j}(\bar{y}^k)], 1 - \mu_{A_j}(\bar{x}) \} \quad (3.134)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \max \{ \min[\mu_{A_j}(\bar{x}), p_{j,k}], 1 - \mu_{A_j}(\bar{x}) \} \quad (3.135)$$

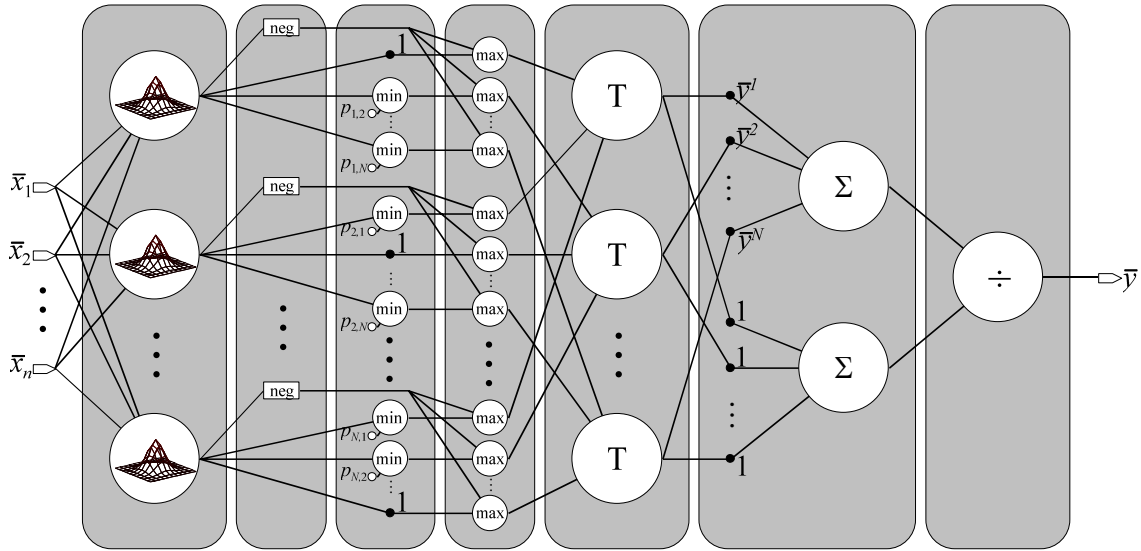
Podstawiając (3.41) i (3.135) do wzoru (3.26) opisującego agregację, uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T \left[\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})), \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \max(\min(\mu_{A_j}(\bar{x}), p_{j,k}), 1 - \mu_{A_j}(\bar{x})) \right] \quad (3.136)$$

Otrzymaną funkcję przynależności zbioru B' wyrażoną wzorem (3.136) można podstawić bezpośrednio do (3.4), uzyskując następujący opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu Zadeha

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left[\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})), \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \max(\min(\mu_{A_j}(\bar{x}), p_{j,k}), 1 - \mu_{A_j}(\bar{x})) \right]}{\sum_{k=1}^N T \left[\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})), \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \max(\min(\mu_{A_j}(\bar{x}), p_{j,k}), 1 - \mu_{A_j}(\bar{x})) \right]} \quad (3.137)$$

Rysunek 3.12 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.137).



Rys. 3.12. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min \left[\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})), \min_{j=1 \dots N, j \neq k} \max(\min(\mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right]}{\sum_{k=1}^N \min \left[\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})), \min_{j=1 \dots N, j \neq k} \max(\min(\mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right]} \quad (3.138)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej przez operację iloczynu (2.86)

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \left[\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})) \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^N \max(\min(\mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right]}{\sum_{k=1}^N \left[\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})) \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^N \max(\min(\mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right]} \quad (3.139)$$

3.4.6 Reguła probabilistyczna

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji wyrażonej przez (2.93) jest określona przez (3.49), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \min[1, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) + \mu_{A^j}(\bar{x}) \cdot \mu_{B^j}(\bar{y}^k)] \quad (3.140)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\begin{aligned}\mu_{B^j}(\bar{y}^k) &= \min[1, 1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) + \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot p_{j,k}] = \\ &= \min[1, 1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \sim p_{j,k}]\end{aligned}\quad (3.141)$$

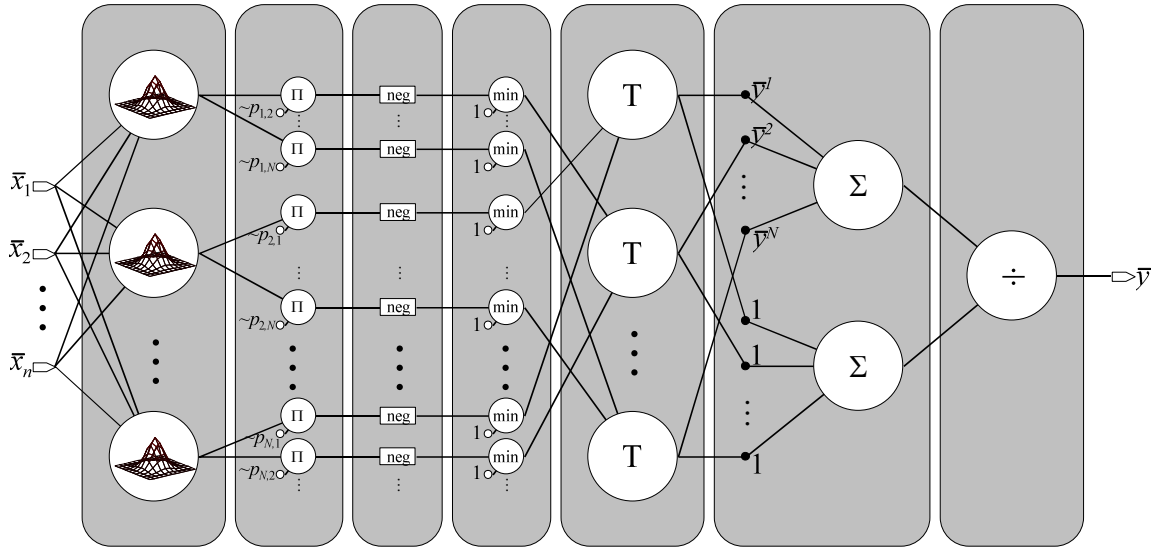
Podstawiając wyrażenie (3.49) i (3.141) do wzoru (3.26) opisującego agregację uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \sim p_{j,k}) \quad (3.142)$$

Uzyskaną funkcję przynależności zbioru B' wyrażoną wzorem (3.142) można podstawić bezpośrednio do (3.4), otrzymując opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu stochastycznego

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \sim p_{j,k})}{\sum_{k=1}^N T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \sim p_{j,k})} \quad (3.143)$$

Rysunek 3.13 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.143).



Rys. 3.13. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły probabilistycznej.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \{ \min(1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \sim p_{j,k}) \}}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \{ \min(1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \sim p_{j,k}) \}} \quad (3.144)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min(1, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) \sim p_{j,k})}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min(1, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x}) \sim p_{j,k})} \quad (3.145)$$

3.4.7 Reguła Willmotta

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji określonej przez (2.96) jest wyrażona przez (3.57), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), \mu_{B^j}(\bar{y}^k)), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), 1 - \mu_{B^j}(\bar{y}^k)], \min(\mu_{B^j}(\bar{y}^k), 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\} \quad (3.146)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}], \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\} \quad (3.147)$$

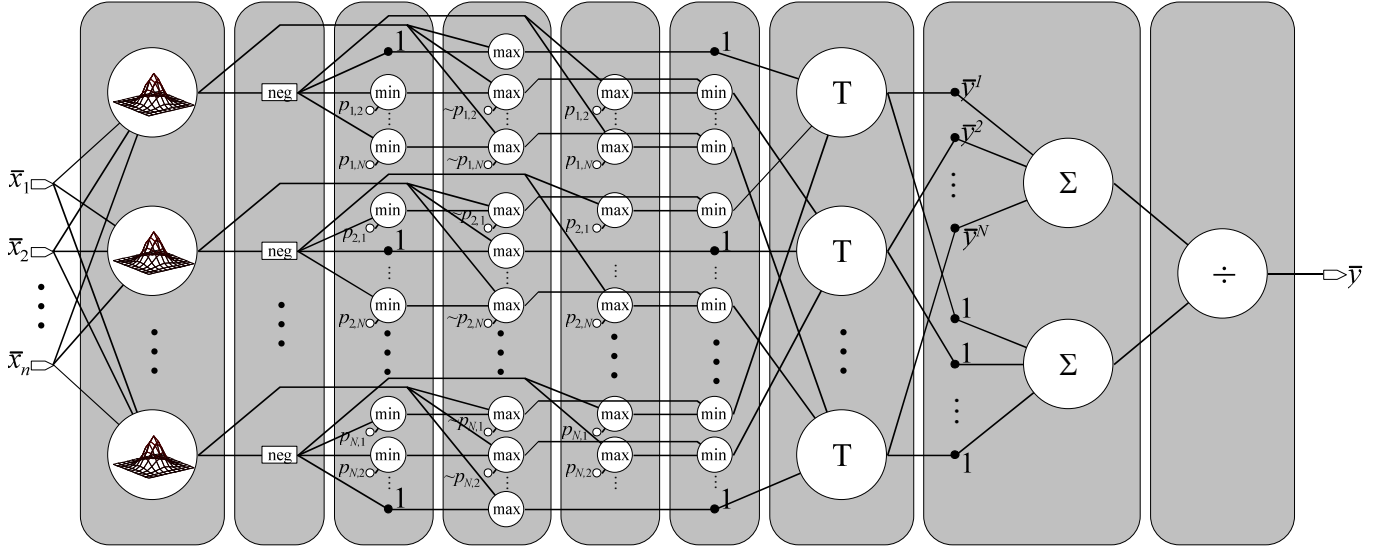
Podstawiając (3.57) i (3.147) do wzoru (3.26) opisującego agregację, uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T \left[\begin{array}{c} \max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}], \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\} \end{array} \right] \quad (3.148)$$

Funkcję przynależności zbioru B' wyrażoną wzorem (3.148) można podstawić bezpośrednio do (3.4), uzyskując następujący opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu Willmotta

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left[\begin{array}{c} \max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}], \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\} \end{array} \right]}{\sum_{k=1}^N T \left[\begin{array}{c} \max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}], \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\} \end{array} \right]} \quad (3.149)$$

Rysunek 3.14 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.149).



Rys. 3.14. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Willmotta.

Warto zauważyć, że warstwa 5-ta struktury przedstawionej na rysunku 3.14 może być przetwarzana równocześnie z warstwą 3-cią lub 4-tą.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min \left[\min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \left\{ \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}, \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\} \right\} \right]}{\sum_{k=1}^N \min \left[\min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} \left\{ \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}, \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\} \right\} \right]} \quad (3.150)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej przez operację iloczynu (2.86)

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}^k \cdot \max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})) \cdot \sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}, \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\}}{\max(\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x})) \cdot \sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left\{ \max(1 - \mu_{A^j}(\bar{x}), p_{j,k}), \max[\mu_{A^j}(\bar{x}), \sim p_{j,k}, \min(p_{j,k}, 1 - \mu_{A^j}(\bar{x})) \right\}} \quad (3.151)$$

3.4.8 Reguła ograniczonej sumy

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji określonej przez (2.94) jest wyrażona przez (3.65),

natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \min[1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + \mu_{B^j}(\bar{y}^k)] \quad (3.152)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \min[1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}] \quad (3.153)$$

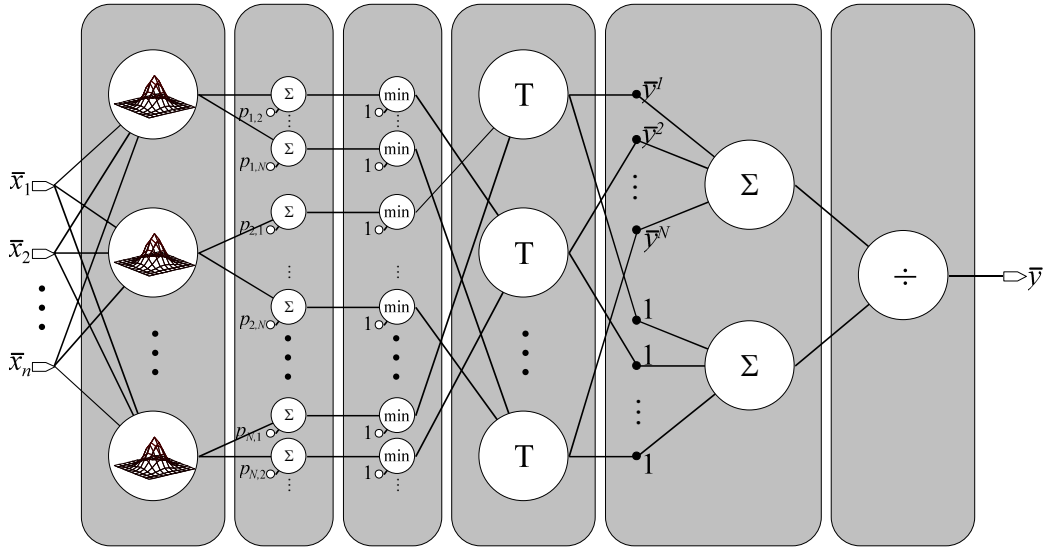
Podstawiając wyrażenia (3.65) i (3.153) do wzoru (3.26) opisującego agregację uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \frac{1}{T} \min_{j=1, j \neq k}^N [1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}] \quad (3.154)$$

Funkcję przynależności zbioru B' wyrażoną wzorem (3.154) można podstawić bezpośrednio do (3.4), uzyskując następujący opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu ograniczonej sumy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \frac{1}{T} \min_{j=1, j \neq k}^N [1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}]}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{T} \min_{j=1, j \neq k}^N [1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}]} \quad (3.155)$$

Rysunek 3.15 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.155).



Rys. 3.15. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy.

Jeśli agregację dokonuje się przy wykorzystaniu operacji minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} \{ \min[1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}] \}}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} \{ \min[1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}] \}} \quad (3.156)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min[1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min[1, \mu_{A^j}(\bar{x}) + p_{j,k}]} \quad (3.157)$$

3.4.9 Reguła Goguena

Wartość $\mu_{B'^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji Goguena (2.90) jest wyrażona przez (3.73), natomiast

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \min \left[1, \frac{\mu_{B^j}(\bar{y}^k)}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right] \quad (3.158)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \min \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right] \quad (3.159)$$

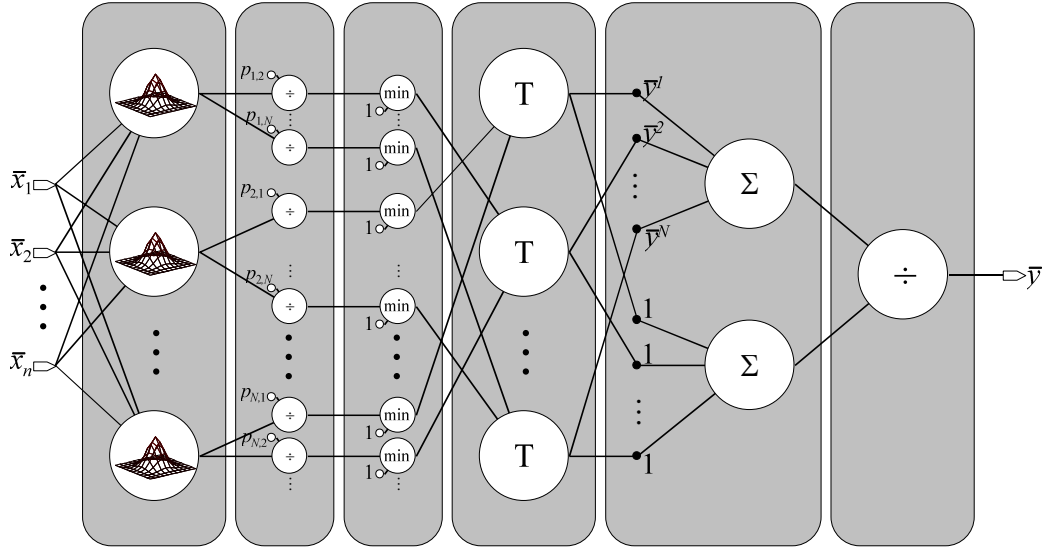
Podstawiając (3.73) i (3.159) do wzoru (3.26) opisującego agregację uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right] \quad (3.160)$$

Wyrażenie (3.160) określające zbiór rozmyty B' można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), otrzymując opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu Goguena w postaci

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right]}{\sum_{k=1}^N T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right]} \quad (3.161)$$

Rysunek 3.16 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.161).



Rys. 3.16. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Goguena.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} \left\{ \min \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1..N \\ j \neq k}} \left\{ \min \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right] \right\}} \quad (3.162)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej przy wykorzystaniu operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left[1, \frac{p_{j,k}}{\mu_{A^j}(\bar{x})} \right]} \quad (3.163)$$

3.4.10 Reguła Sharpa

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla implikacji Sharpa (2.91) jest wyrażona wzorem (3.84), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) \leq \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \\ 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) > \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \end{cases} \quad (3.164)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \leq p_{j,k} \\ 0 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) > p_{j,k} \end{cases} \quad (3.165)$$

lub jeszcze prościej

$$\mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \quad (3.166)$$

gdzie znak $\overset{\leq}{*}$ oznacza dwuelementowy operator zdefiniowany następująco

$$a \overset{\leq}{*} b = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } a \leq b \\ 0 & \text{jeżeli } a > b \end{cases} \quad (3.167)$$

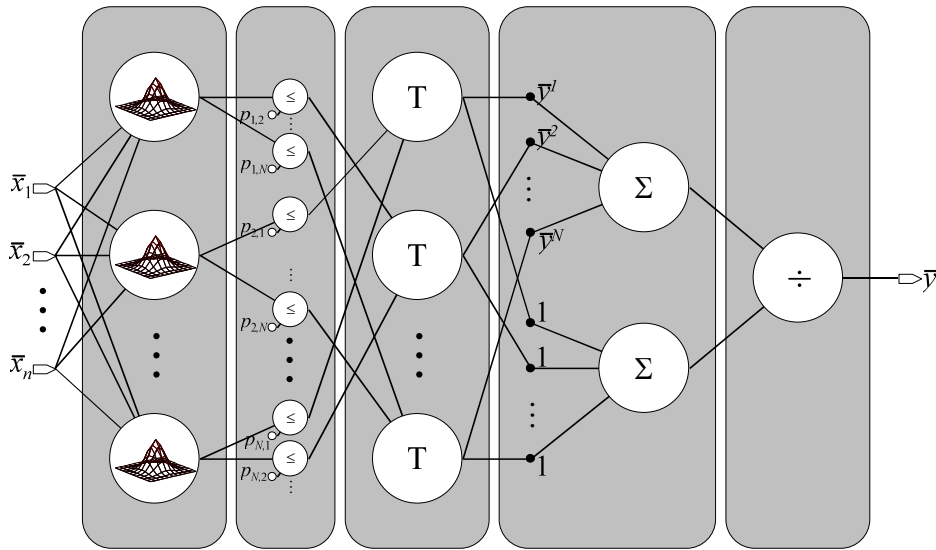
Podstawiając wyrażenia (3.84) i (3.166) do wzoru (3.26) opisującego agregację uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right) \quad (3.168)$$

Wyrażenie (3.168) określające zbiór rozmyty B' można podstawić bezpośrednio do (3.4), otrzymując opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu Sharpa

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right)}{\sum_{k=1}^N \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right)} \quad (3.169)$$

Rysunek 3.17 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.169).



Rys. 3.17. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Sharpa.

W strukturze przedstawionej na rysunku 3.17 element oznaczony symbolem „ $\leq$ ” realizuje operację $\overset{\leq}{*}$ określoną wzorem (3.167).

Jeśli agregacji dokonuje się przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1, \dots, N \\ j \neq k}} \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right)}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1, \dots, N \\ j \neq k}} \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right)} \quad (3.170)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right)}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right)} \quad (3.171)$$

3.4.11 Reguła Gödela

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji określonej przez (2.92) jest wyrażona za pomocą (3.93), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) \leq \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \\ \mu_{B^j}(\bar{y}^k) & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) > \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \end{cases} \quad (3.172)$$

lub korzystając z (3.109) i (3.167)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \min \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right] \quad (3.173)$$

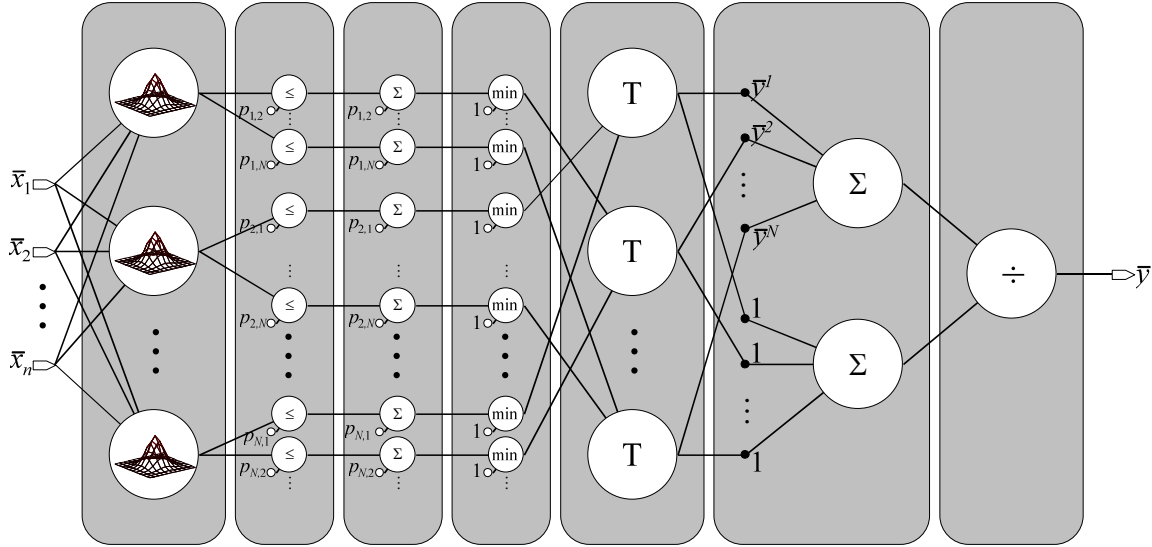
Podstawiając wyrażenia (3.93) i (3.173) do wzoru (3.26) opisującego agregację uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \min \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{x}) \overset{\leq}{*} p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right] \quad (3.174)$$

Funkcję przynależności zbioru B' wyrażone wzorem (3.174) można podstawić bezpośrednio do wzoru (3.4), uzyskując następujący opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu Gödela

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right]}{\sum_{k=1}^N T \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right]} \quad (3.175)$$

Rysunek 3.18 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.175).



Rys. 3.18. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Gödela.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left\{ \min \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N \min_{j=1, \dots, N, j \neq k} \left\{ \min \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right] \right\}} \quad (3.176)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{j=1, \dots, N, j \neq k} \min \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{j=1, \dots, N, j \neq k} \min \left[1, \left(\mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}})^* p_{j,k} \right) + p_{j,k} \right]} \quad (3.177)$$

3.4.12 Reguła Yagera

Wartość $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$ dla reguły implikacji wyrażonej przez (2.97) jest określona przez (3.102), natomiast

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} \mu_{B^j}(\bar{y}^k)^{\mu_{A^j}(\bar{x})} & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.178)$$

lub korzystając z (3.109)

$$\mu_{B^j}(\bar{y}^k) = \begin{cases} p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})} & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } \mu_{A^j}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (3.179)$$

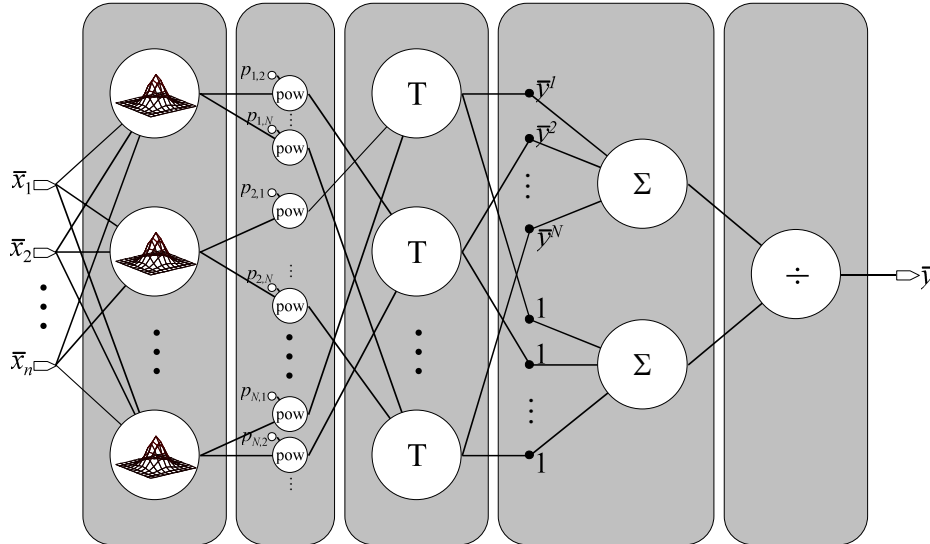
Podstawiając wyrażenie (3.102) i (3.179) do wzoru (3.26) opisującego agregację uzyskuje się

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})}) \quad (3.180)$$

Funkcję przynależności zbioru B' opisaną wyrażeniem (3.180) można podstawić bezpośrednio do (3.4), otrzymując opis rozszerzonego rozmyto-neuronowego systemu wnioskującego z wnioskowaniem typu stochastycznego

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})})}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})})} \quad (3.181)$$

Rysunek 3.19 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.181).



Rys. 3.19. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Yagera.

Element opisany przez „pow” w sieci przedstawionej na rysunku 3.19 realizuje operację potęgowania.

Jeśli agregacja jest zrealizowana przez operację minimum (2.85), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} (p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})})}{\sum_{k=1}^N \min_{\substack{j=1 \dots N \\ j \neq k}} (p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})})} \quad (3.182)$$

natomiast w przypadku agregacji realizowanej za pomocą operacji iloczynu (2.86), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})})}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (p_{j,k}^{\mu_{A^j}(\bar{x})})} \quad (3.183)$$

3.5 Struktury dla przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych

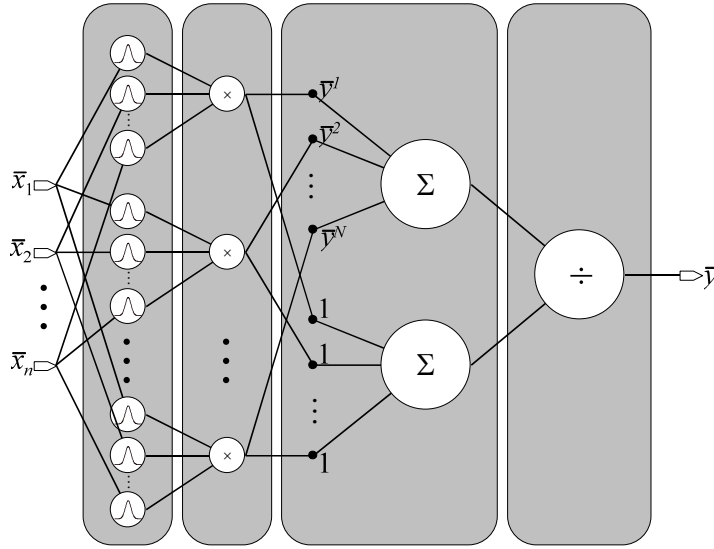
W przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych funkcje przynależności zbiorów rozmytych A^k występujących w poprzednikach poszczególnych reguł R^k , określone zależnością (2.17), mogą być wyrażone wzorem (2.18) lub (2.19). Zależy to od przyjętej definicji iloczynu kartezjańskiego - typu minimum czy iloczyn. Podstawiając wyrażenia (2.18) i (2.19) do wzorów opisujących poszczególne struktury (p. 3.2, 3.3 i 3.4), otrzymamy opisy struktur dla różnych metod wnioskowania rozmytego, dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

3.5.1 Struktura z regułą wnioskowania Larsena i Mamdaniego

Stosując definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.13) lub (3.20), otrzymujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N (\bar{y}^k \cdot \min_{i=1 \dots n} \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i))}{\sum_{k=1}^N \min_{i=1 \dots n} \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i)} \quad (3.184)$$

Rysunek 3.20 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.184).



Rys. 3.20. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Larsena i Mamdaniego dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Korzystając natomiast z definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\bar{y}^k \cdot \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i) \right)}{\sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i)} \quad (3.185)$$

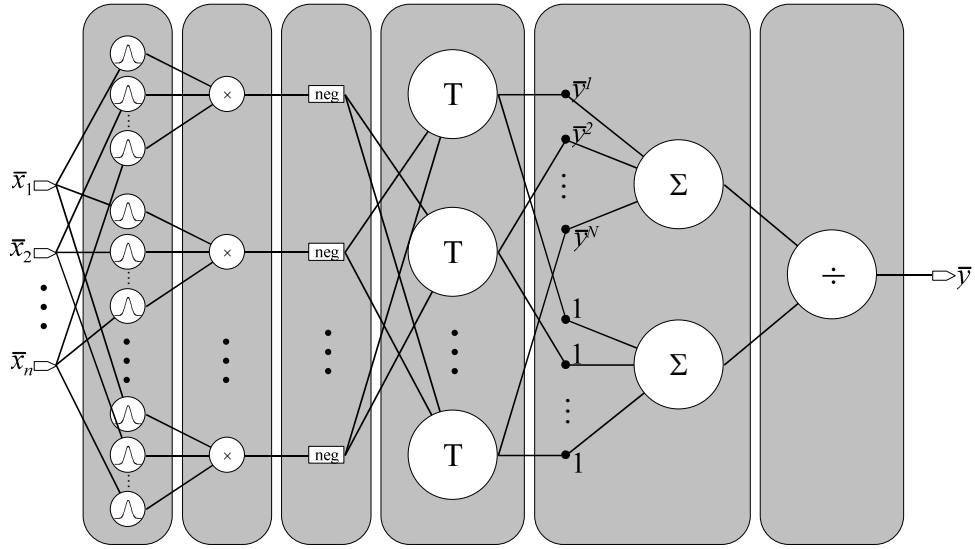
Elementy oznaczone symbolem „ $\times$ ” realizują operację iloczynu kartezjańskiego, czyli dokonują mnożenia albo wyznaczają minimum, zgodnie z wzorami (2.19) lub (2.18).

3.5.2 Struktury z regułą wnioskowania binarną, Łukasiewicza i stochastyczną

Stosując definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.36) lub (3.52), otrzymujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i^j}(\bar{x}_i) \} \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i^j}(\bar{x}_i) \} \right]} \quad (3.186)$$

Rysunek 3.21 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.186).



Rys. 3.21. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza i stochastycznej dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Jeśli natomiast użyjemy definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), mamy

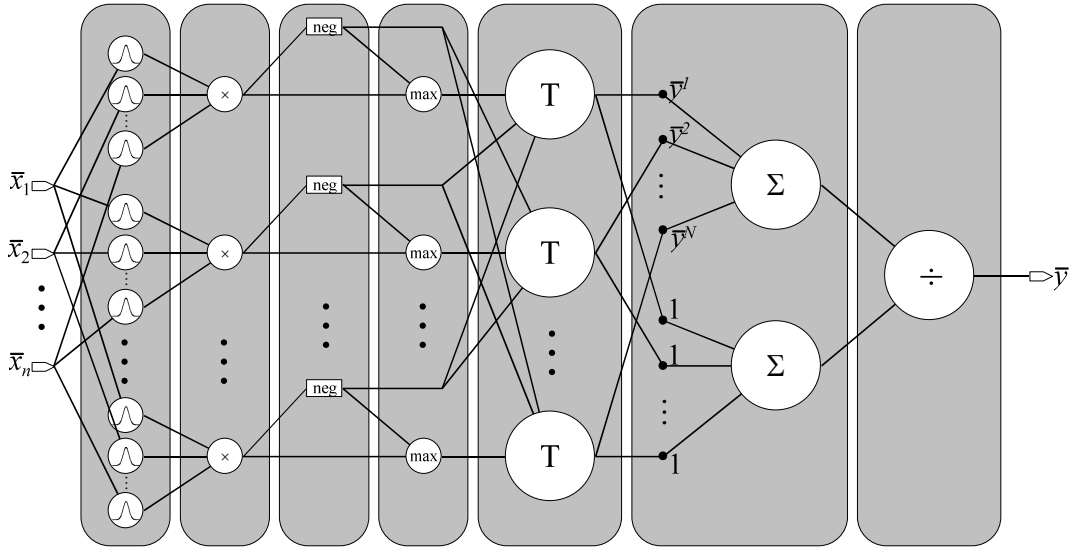
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left[1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \mu_{A_j}(\bar{x}_i) \right]}{\sum_{k=1}^N T \left[1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \mu_{A_j}(\bar{x}_i) \right]} \quad (3.187)$$

3.5.3 Struktury z regułą wnioskowania Zadeha i Willmotta

Jeśli zastosujemy definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.44) lub (3.60), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max \left[\min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i) \}, 1 - \min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i) \} \right] \cdot T \left[1 - \min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i^j}(\bar{x}_i) \} \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max \left[\min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i) \}, 1 - \min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i) \} \right] \cdot T \left[1 - \min_{i=1..n} \{ \mu_{A_i^j}(\bar{x}_i) \} \right] \right\}} \quad (3.188)$$

Rysunek 3.22 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.188).



Rys. 3.22. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha i Willmotta dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Korzystając natomiast z definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), uzyskamy wzór

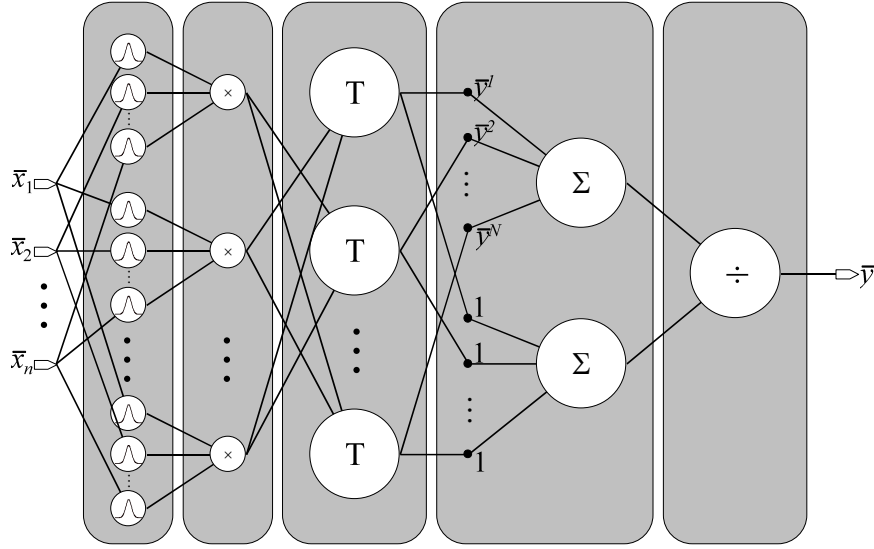
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i), 1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i) \right], T \left[1 - \prod_{j=1, j \neq k}^N \mu_{A_j^j}(\bar{x}_i) \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i), 1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(\bar{x}_i) \right], T \left[1 - \prod_{j=1, j \neq k}^N \mu_{A_j^j}(\bar{x}_i) \right] \right\}} \quad (3.189)$$

3.5.4 Struktury z regułą wnioskowania ograniczonej sumy

Stosując definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.68), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \min_{j=1, i=1..n, j \neq k}^N \{ \mu_{A_j^j}(\bar{x}_i) \}}{\sum_{k=1}^N T \min_{j=1, i=1..n, j \neq k}^N \{ \mu_{A_j^j}(\bar{x}_i) \}} \quad (3.190)$$

Rysunek 3.23 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (3.190).



Rys. 3.23. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Wykorzystując natomiast definicję iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), uzyskamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\bar{y}^k \cdot T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mu_{A_j}(\bar{x}_i) \right)}{\sum_{k=1}^N T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \mu_{A_j}(\bar{x}_i)} \quad (3.191)$$

4 MODYFIKACJE SYSTEMÓW ROZMYTO-NEURONOWYCH

Systemy rozmyto-neuronowe przedstawione w rozdziale 3 mogą być modyfikowane pod wieloma względami. Celem tych modyfikacji może być uproszczenie struktury lub zwiększenie jej funkcjonalności. Większość tego typu zmian, omówionych w kolejnych punktach niniejszego rozdziału, dotyczy wszystkich rozważanych dotąd struktur. Niektóre jednak modyfikacje stosuje się tylko do pewnych przypadków szczególnych.

4.1 Uproszczenie realizacji zbiorów rozmytych poprzedników reguł

Modyfikacja ta dotyczy tylko tych systemów, których zmienne wejściowe możemy traktować jako niezależne (p. 2.1.3 i 3.5).

W strukturach przedstawionych w punkcie 3.5 dla każdej z N reguł jest określonych n jednowymiarowych zbiorów rozmytych. Daje to $N \cdot n$ zbiorów rozmytych. W praktyce okazuje się, że zbiory rozmyte określone w różnych regułach dla danych zmiennych lingwistycznych powtarzają się lub są do siebie bardzo zbliżone. Rozważmy dwie następujące reguły:

R^1 : **JEŻELI** *kolor pomidora jest czerwony* **I** *twardość pomidora jest twarda* **TO** *przydatność pomidora jest wysoka*

R^2 : **JEŻELI** *kolor pomidora jest czerwony* **I** *twardość pomidora jest miękka* **TO** *przydatność pomidora jest średnia*

W schemacie wnioskowania (2.71) odpowiada to przypadkowi, gdy dla zmiennej lingwistycznej x_1 (*kolor pomidora*) zbiór rozmyty A_1^1 jest taki sam jak zbiór rozmyty A_1^2 . Każdy z nich opisuje kolor *czerwony*. Istotnym uproszczeniem w takim przypadku może być zdefiniowanie dla poszczególnych zmiennych lingwistycznych x_i szeregu N_i wartości i odpowiadających im zbiorów rozmytych A_{i,h_i} , gdzie $h_i = 1 \dots N_i$. Ilość zbiorów rozmytych wyniesie wówczas $\sum_{i=1}^n N_i$. W takim przypadku można zbudować zbiór reguł postaci

$$R^k : \text{ JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_{1,h_1} \text{ I } x_2 \text{ jest } A_{2,h_2} \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_{n,h_n} \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.1)$$

których maksymalna ilość wynosi

$$N = \prod_{i=1}^n N_i \quad (4.2)$$

Jeżeli definiowane są wszystkie możliwe reguły, to istotne jest właściwe przyporządkowanie wartości zbiorów rozmytych A_{i,h_i} do odpowiednich reguł. Można to zrealizować korzystając z poniższego wzoru definiującego h_i jako funkcję numeru reguły

$$h_i(k) = \left[\left((k-1) \operatorname{div} \prod_{l=0}^{i-1} N_l \right) \bmod N_i \right] + 1 \quad (4.3)$$

gdzie $i=1 \dots n$, $k=1 \dots N$, a $N_0=1$. Operator „div” oznacza dzielenie bez reszty, natomiast operator „mod” resztę z dzielenia.

Można również zastosować metodę, która określa numer reguły na podstawie numerów h_i wartości w niej określonych [50]. Wyraża się ona wzorem

$$k = \sum_{i=1}^n \left[(h_i - 1) \prod_{l=0}^{i-1} N_l \right] + 1 \quad (4.4)$$

gdzie $i=1 \dots n$, a $N_0=1$.

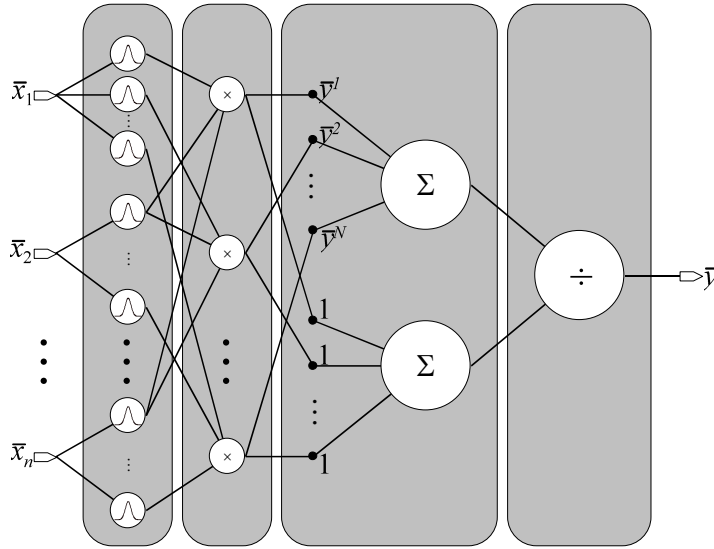
Tak uproszczone struktury otrzymają postaci przedstawione niżej. Występujący w nich parametr h_i jest określony wzorem (4.3).

Uproszczona struktura z regułą wnioskowania Larsena i Mamdaniego

Stosując definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.184), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\bar{y}^k \cdot \min_{i=1 \dots n} \mu_{A_{i,h_i(k)}}(\bar{x}_i) \right)}{\sum_{k=1}^N \min_{i=1 \dots n} \mu_{A_{i,h_i(k)}}(\bar{x}_i)} \quad (4.5)$$

Rysunek 4.1 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.5).



Rys. 4.1. Uproszczona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Larsena i Mamdaniego dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Wykorzystując natomiast definicję iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\bar{y}^k \cdot \prod_{i=1}^n \mu_{A_{i,h_i(k)}}(\bar{x}_i) \right)}{\sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^n \mu_{A_{i,h_i(k)}}(\bar{x}_i)} \quad (4.6)$$

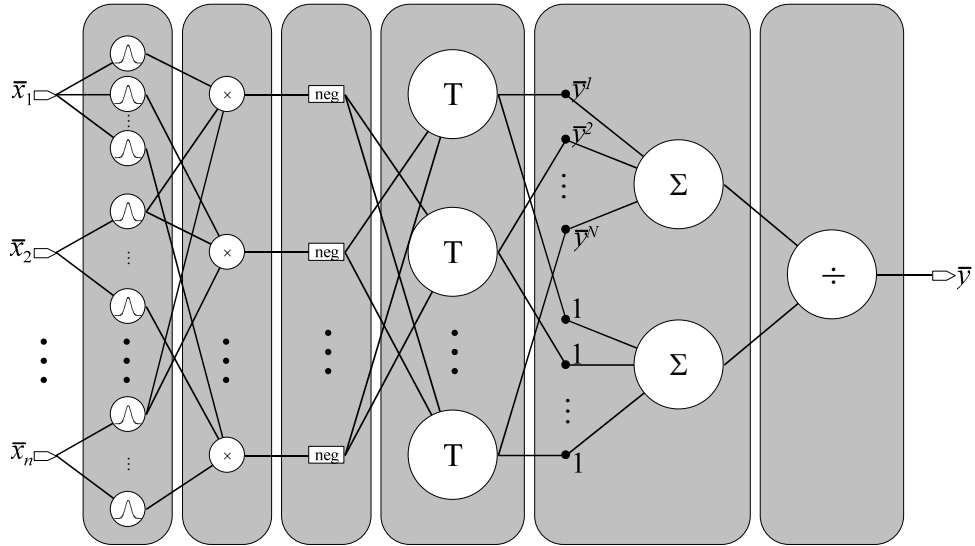
Elementy oznaczone symbolem „ $\times$ ” realizują operację iloczynu kartezjańskiego, czyli dokonują mnożenia albo wyznaczają minimum, zgodnie z wzorami (2.19) lub (2.18).

Uproszczona struktura z regułą wnioskowania binarna, Łukasiewicza i stochastyczną

Jeśli zastosujemy definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.186), to

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_{i,h_i(j)}}(\bar{x}_i) \} \right]}{\sum_{k=1}^N \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_{i,h_i(j)}}(\bar{x}_i) \} \right]} \quad (4.7)$$

Rysunek 4.2 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.7).



Rys. 4.2. Uproszczona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza i stochastycznej dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

W przypadku definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), wzór (4.7) przyjmuje postać

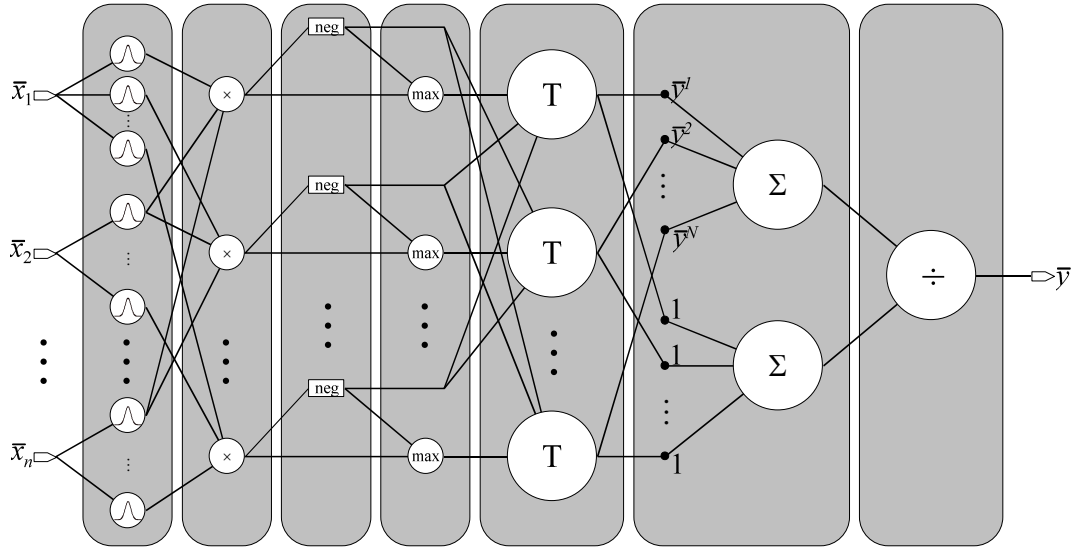
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left[1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \right]}{\sum_{k=1}^N T \left[1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \right]} \quad (4.8)$$

Uproszczona struktury z regułą wnioskowania Zadeha i Willmotta

Stosując definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.188), otrzymujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max \left[\min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i) \}, 1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i) \} \right] \cdot T \left[1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \} \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max \left[\min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i) \}, 1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i) \} \right] \cdot T \left[1 - \min_{i=1 \dots n} \{ \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \} \right] \right\}} \quad (4.9)$$

Rysunek 4.3 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.9).



Rys. 4.3. Uproszczona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha i Willmotta dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Jeśli natomiast wykorzystamy definicję iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), to

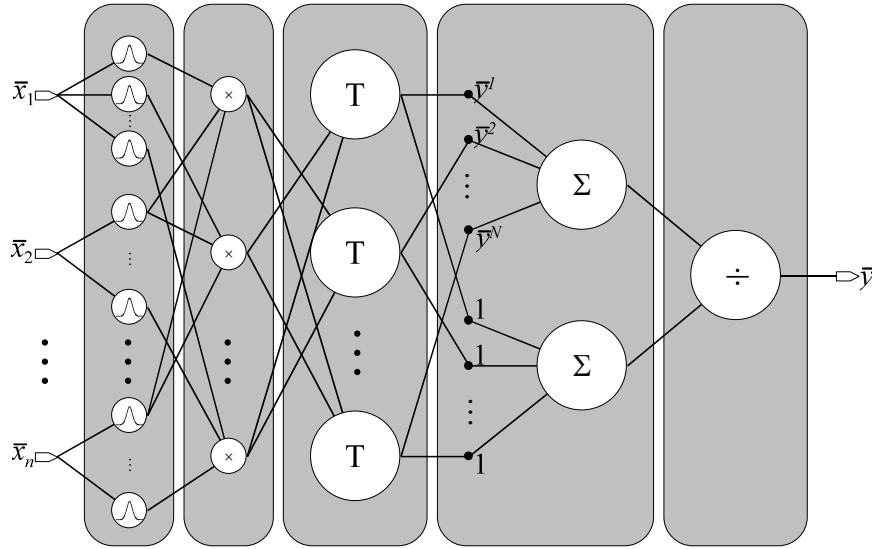
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i), 1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i) \right], \prod_{j=1, j \neq k}^N \left[1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max \left[\prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i), 1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(k)}(\bar{x}_i) \right], \prod_{j=1, j \neq k}^N \left[1 - \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \right] \right\}} \quad (4.10)$$

Uproszczona struktura z regułą wnioskowania ograniczonej sumy

W przypadku zastosowania definicji iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) do wzoru (3.190), uzyskamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \min_{j=1, j \neq k}^N \min_{i=1, \dots, n} \{ \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \}}{\sum_{k=1}^N T \min_{j=1, j \neq k}^N \min_{i=1, \dots, n} \{ \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \}} \quad (4.11)$$

Rysunek 4.4 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.11).



Rys. 4.4. Uproszczona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy dla niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Stosując natomiast definicję iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), mamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\bar{y}^k \cdot T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i) \right)}{\sum_{k=1}^N T \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \prod_{i=1}^n \mu_{A_i, h_i(j)}(\bar{x}_i)} \quad (4.12)$$

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla struktur opisanych w punkcie 3.4.

4.2 Struktury z rozbudowanymi poprzednikami reguł

Poprzedniki reguł, które są implementowane w rozmyto-neuronowym systemie wnioskującym mogą być znacznie rozbudowane w stosunku do przedstawionych wzorem (2.74). Mogą one zawierać spójniki **LUB** oraz **I**. Jeżeli poprzednik reguły R^k składa się z m części połączonych spójnikami **LUB**, to przyjmuje ona postać

$$R^k : \text{ JEŻELI } x \text{ jest } A^{k,1} \text{ LUB } x \text{ jest } A^{k,2} \text{ LUB } \dots \text{ LUB } x \text{ jest } A^{k,m} \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.13)$$

którą można zapisać jako

$$R^k : \text{ JEŻELI } x \text{ jest } A^{k,1} \cup A^{k,2} \cup \dots \cup A^{k,m} \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.14)$$

Jak widać, reguła z rozbudowanymi poprzednikami sprowadza się w ten sposób do reguły postaci (2.74), przy czym

$$A^k = \bigcup_{l=1}^m A^{k,l} \quad (4.15)$$

Suma zbiorów rozmytych jest realizowana przez S -normę (def. 10), zatem

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = S\left(\mu_{A^{k,l}}(\mathbf{x})\right) \quad (4.16)$$

Rozważmy teraz przypadek, gdy poprzednik reguły R^k składa się z m części połączonych spójnikami **I**, czyli przyjmuje ona postać

$$R^k : \text{ JEŻELI } \mathbf{x} \text{ jest } A^{k,1} \text{ I } \mathbf{x} \text{ jest } A^{k,2} \text{ I } \dots \text{ I } \mathbf{x} \text{ jest } A^{k,m} \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.17)$$

którą można zapisać jako

$$R^k : \text{ JEŻELI } \mathbf{x} \text{ jest } A^{k,1} \cap A^{k,2} \cap \dots \cap A^{k,m} \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.18)$$

Reguła z tak rozbudowanymi poprzednikami również sprowadza się w ten sposób do reguły postaci (2.74), przy czym

$$A^k = \bigcap_{l=1}^m A^{k,l} \quad (4.19)$$

Przecięcie zbiorów rozmytych jest realizowane przez T -normę (def. 9), zatem

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = T\left(\mu_{A^{k,l}}(\mathbf{x})\right) \quad (4.20)$$

Poprzedniki reguły mogą zawierać jednocześnie zarówno spójniki **LUB** jak i **I**, na przykład

$$R^k : \text{ JEŻELI } (\mathbf{x} \text{ jest } A^{k,1} \text{ LUB } \mathbf{x} \text{ jest } A^{k,2}) \text{ I } \mathbf{x} \text{ jest } A^{k,3} \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.21)$$

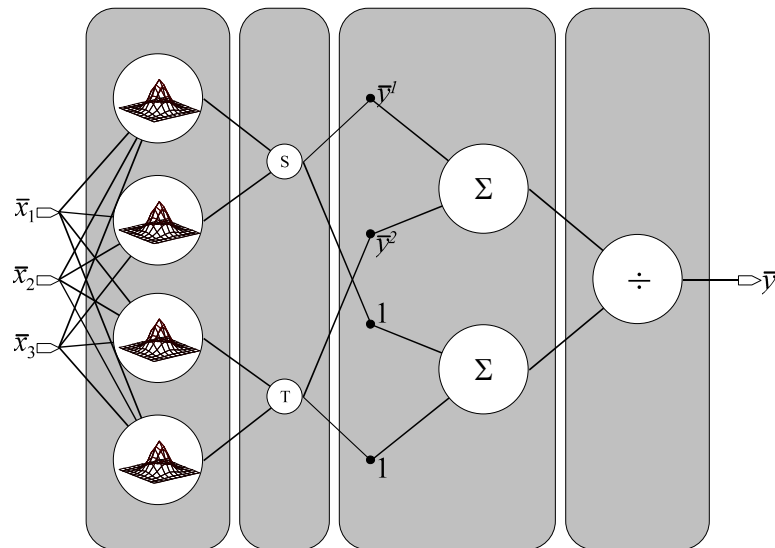
Regułę taką możemy przedstawić jako

$$R^k : \text{ JEŻELI } \mathbf{x} \text{ jest } (A^{k,1} \cup A^{k,2}) \cap A^{k,3} \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.22)$$

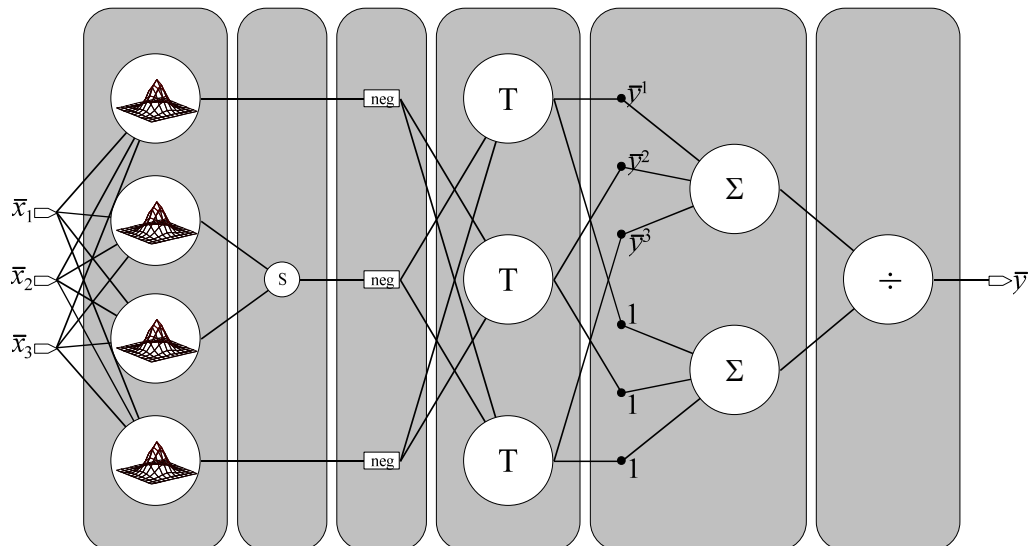
czyli sprowadzić ją do postaci (2.74), gdzie

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = \left(\mu_{A^{k,1}}(\mathbf{x}) \overset{S}{*} \mu_{A^{k,2}}(\mathbf{x}) \right) \overset{T}{*} \mu_{A^{k,3}}(\mathbf{x}) \quad (4.23)$$

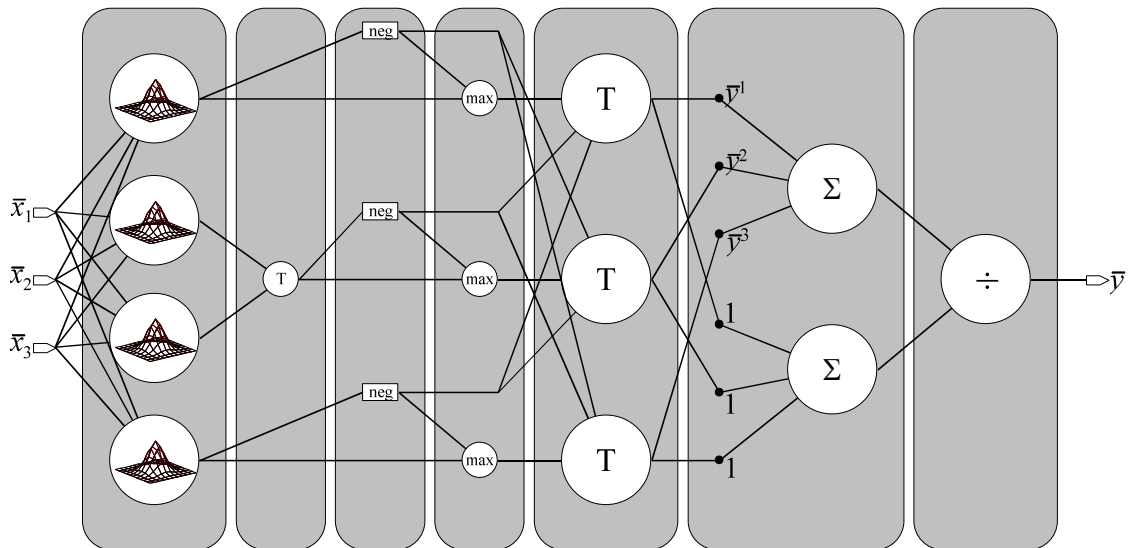
Na rysunkach 4.5, 4.6 i 4.7 zamieszczone są przykłady struktur z rozbudowanymi poprzednikami reguł, zbudowane z zastosowaniem różnych reguł wnioskowania.



Rys. 4.5. Przykład struktury systemu rozmyto-neuronowego z rozbudowanymi poprzednikami reguł z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego i Larsena.



Rys. 4.6. Przykład struktury systemu rozmyto-neuronowego z rozbudowanymi poprzednikami reguł z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza i probabilistycznej.



Rys. 4.7. Przykład struktury systemu rozmyto-neuronowego z rozbudowanymi poprzednikami reguł z wnioskowaniem wg reguły Zadeha i Willmotta.

4.3 Struktury z niepełnymi regułami

Jest to kolejna modyfikacja dotycząca przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych (p. 2.1.3 i 3.5)

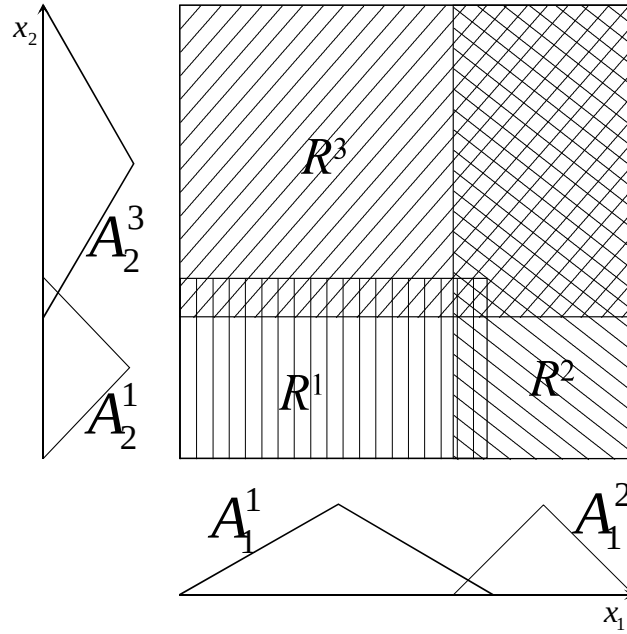
Konstruując rozmyto-neuronowy system wnioskujący, może zaistnieć potrzeba zaimplementowania reguł postaci (2.75), lecz o niepełnych poprzednikach, tzn. poprzednikach w których nie występują wszystkie zmienne lingwistyczne występujące w przesłance. Jeżeli na przykład przesłanka jest postaci x_1 jest A'_1 I x_2 jest A'_2 , to kolejne reguły mogą przyjąć postać

$$R^1: \text{ JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^1 \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^1 \text{ TO } y \text{ jest } B^1$$

$$R^2: \text{ JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^2 \text{ TO } y \text{ jest } B^2$$

$$R^3: \text{ JEŻELI } x_2 \text{ jest } A_2^3 \text{ TO } y \text{ jest } B^3$$

W poprzedniku reguły R^1 występują wszystkie zmienne lingwistyczne występujące w przesłance, natomiast w poprzednikach reguł R^2 i R^3 odpowiednio tylko zmienne x_1 i x_2 . Przestrzeń wejściowa $\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ jest wówczas podzielona między poszczególne reguły jak na rysunku 4.8.



Rys. 4.8. Przykład podziału przestrzeni wejściowej przy niepełnych regułach.

Jeżeli przyjmiemy, że w przesłance występuje n zmiennych lingwistycznych x_i , gdzie $i=1\dots n$ oraz istnieje N reguł, w regule R^k gdzie $k=1\dots N$ występuje $n_k \leq n$ zmiennych lingwistycznych $x_{d_q^k}$, gdzie $q=1\dots n_k$, a d_q^k przyjmują niepowtarzalnie wartości z przedziału $[1, n]$, będąc indeksami tych zmiennych lingwistycznych, które występują w przesłance reguły R^k , przyjmuje ona wówczas postać

$$R^k : \text{ JEŻELI } x_{d_1^k} \text{ jest } A_{d_1^k}^k \text{ I } x_{d_2^k} \text{ jest } A_{d_2^k}^k \text{ I } \dots \text{ I } x_{d_{n_k}^k} \text{ jest } A_{d_{n_k}^k}^k \text{ TO } y \text{ jest } B^k$$

Korzystając z definicji iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18) funkcja przynależności zbioru rozmytego A^k przyjmuje postać

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = \min_{q=1\dots n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q^k}^k}(x_{d_q^k}) \right\} \quad (4.24)$$

natomiast przyjmując definicję typu iloczyn (2.19)

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = \prod_{q=1}^{n_k} \mu_{A_{d_q^k}^k}(x_{d_q^k}) \quad (4.25)$$

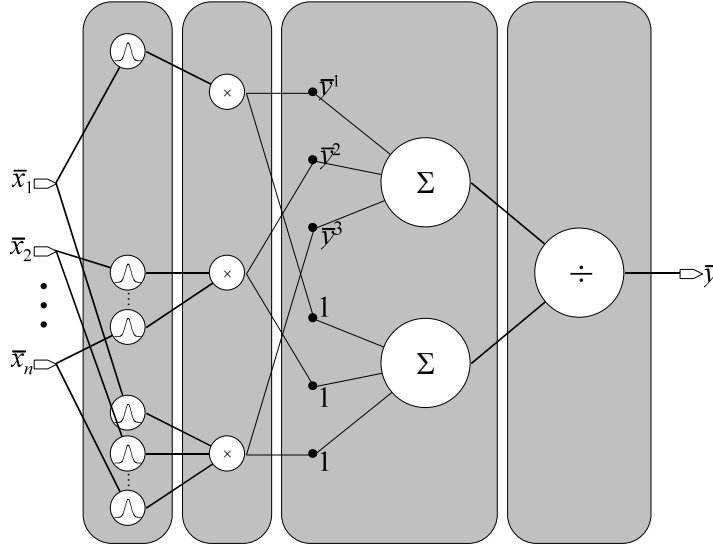
Otrzymane funkcje przynależności zbiorów rozmytych A^k można bezpośrednio podstawić do wzorów opisujących struktury systemów rozmyto-neuronowych omówionych w rozdziale 3. Oto przykłady

Reguła Mamdaniego i Larsena

Stosując definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \min_{q=1..n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q^k}}^k (\bar{x}_{d_q^k}) \right\}}{\sum_{k=1}^N \min_{q=1..n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q^k}}^k (\bar{x}_{d_q^k}) \right\}} \quad (4.26)$$

Rysunek 4.9 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.26).



Rys. 4.9. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego i Larsena z niepełnymi regułami.

W przypadku definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), mamy

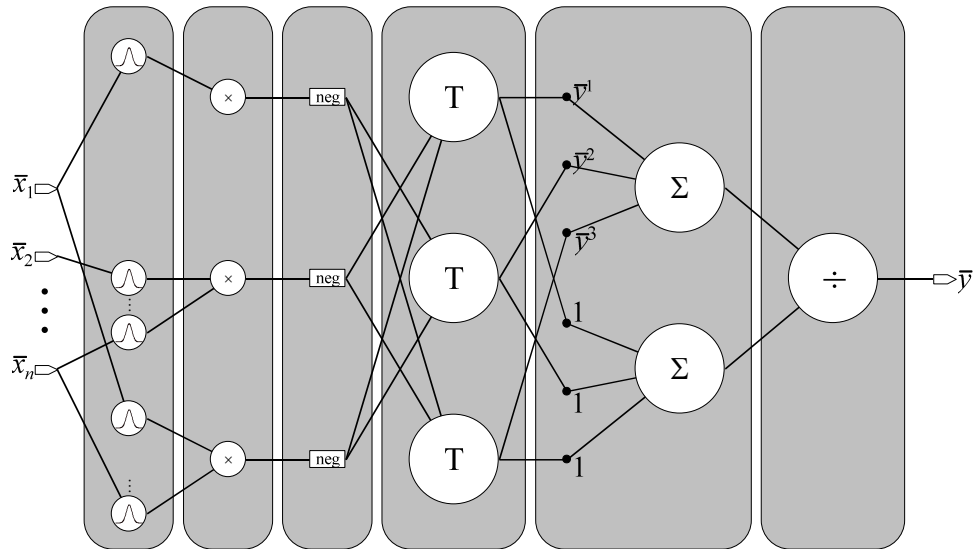
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot \prod_{q=1}^{n_k} \mu_{A_{d_q^k}}^k (\bar{x}_{d_q^k})}{\sum_{k=1}^N \prod_{q=1}^{n_k} \mu_{A_{d_q^k}}^k (\bar{x}_{d_q^k})} \quad (4.27)$$

Reguła binarna, Łukasiewicza i stochastyczna

Jeśli zastosujemy definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18), uzyskamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T_{j \neq k}^N \left[1 - \min_{q=1..n_j} \left\{ \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right\} \right]}{\sum_{k=1}^N T_{j \neq k}^N \left[1 - \min_{q=1..n_j} \left\{ \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right\} \right]} \quad (4.28)$$

Rysunek 4.10 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.28).



Rys. 4.10. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza i stochastycznej z niepełnymi regułami.

Korzystając natomiast z definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), mamy

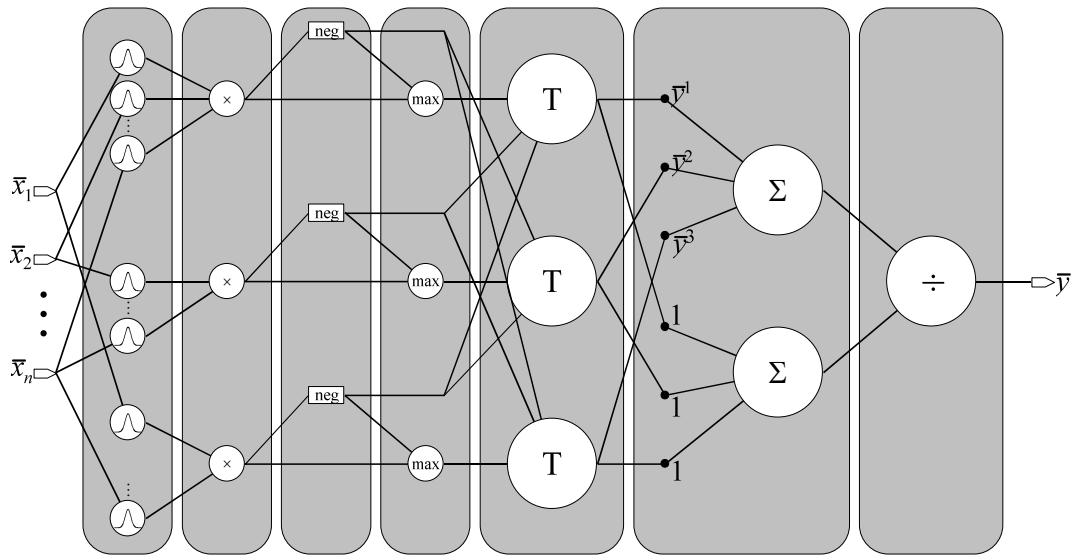
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T_{j=1, j \neq k}^N \left[1 - \prod_{q=1}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right]}{\sum_{k=1}^N T_{j=1, j \neq k}^N \left[1 - \prod_{q=1}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right]} \quad (4.29)$$

Reguła Zadeha i Willmotta

Stosując definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max \left[\min_{q=1 \dots n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k) \right\}, 1 - \min_{q=1 \dots n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k) \right\} \right], T \left[1 - \min_{j=1 \dots n_j} \left\{ \mu_{A_{d_j}^j}(\bar{x}_{d_j}^j) \right\} \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max \left[\min_{q=1 \dots n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k) \right\}, 1 - \min_{q=1 \dots n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k) \right\} \right], T \left[1 - \min_{j=1 \dots n_j} \left\{ \mu_{A_{d_j}^j}(\bar{x}_{d_j}^j) \right\} \right] \right\}} \quad (4.30)$$

Rysunek 4.11 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.30).



Rys. 4.11. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha i Willmotta z niepełnymi regułami.

Wykorzystując natomiast definicję iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), uzyskamy

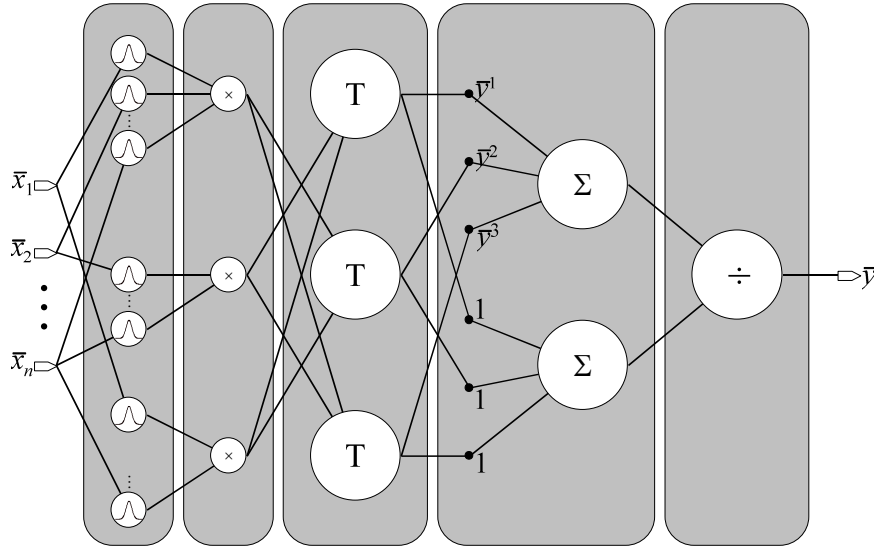
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left\{ \max \left[\prod_{q=1}^{n_k} \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k), 1 - \prod_{q=1}^{n_k} \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k) \right], T \left[1 - \prod_{j=1}^{n_j} \mu_{A_{d_j}^j}(\bar{x}_{d_j}^j) \right] \right\}}{\sum_{k=1}^N T \left\{ \max \left[\prod_{q=1}^{n_k} \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k), 1 - \prod_{q=1}^{n_k} \mu_{A_{d_q}^k}(\bar{x}_{d_q}^k) \right], T \left[1 - \prod_{j=1}^{n_j} \mu_{A_{d_j}^j}(\bar{x}_{d_j}^j) \right] \right\}} \quad (4.31)$$

Reguła ograniczonej sumy

Jeśli zastosujemy definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right\}}{\sum_{k=1}^N T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right\}} \quad (4.32)$$

Rysunek 4.12 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.32).



Rys. 4.12. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy z niepełnymi regułami.

Korzystając natomiast z definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), mamy

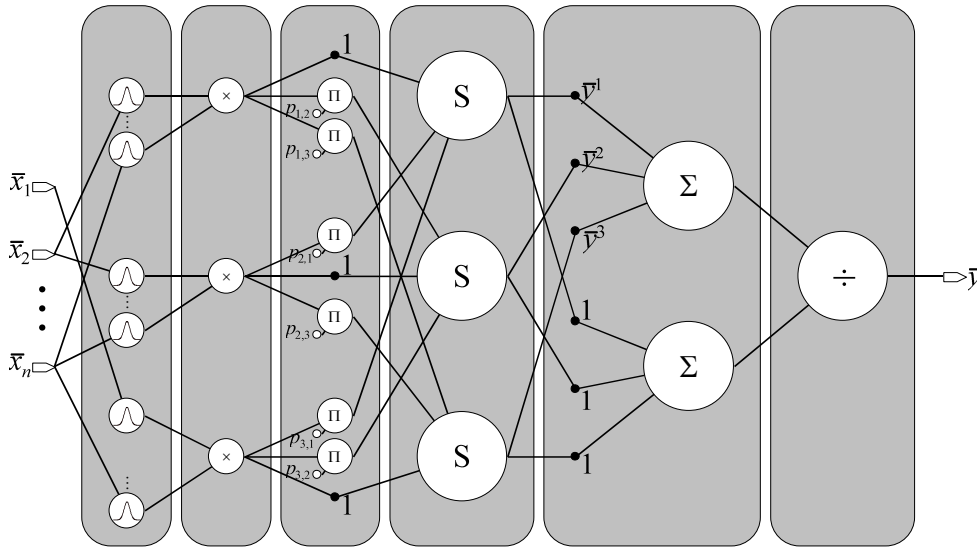
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left[1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right]}{\sum_{k=1}^N T \left[1 - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right]} \quad (4.33)$$

Reguła Larsena (struktura rozszerzona)

Jeśli zastosujemy definicję iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18), otrzymamy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot S \left[\min_{q=1..n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q^k}}^k (\bar{x}_{d_q^k}) \right\}, S \left(\min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right\} \cdot p_{j,k} \right) \right]}{\sum_{k=1}^N S \left[\min_{q=1..n_k} \left\{ \mu_{A_{d_q^k}}^k (\bar{x}_{d_q^k}) \right\}, S \left(\min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right\} \cdot p_{j,k} \right) \right]} \quad (4.34)$$

Rysunek 4.13 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.34).



Rys. 4.13. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Larsena z niepełnymi regułami.

Korzystając z definicji iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), uzyskujemy

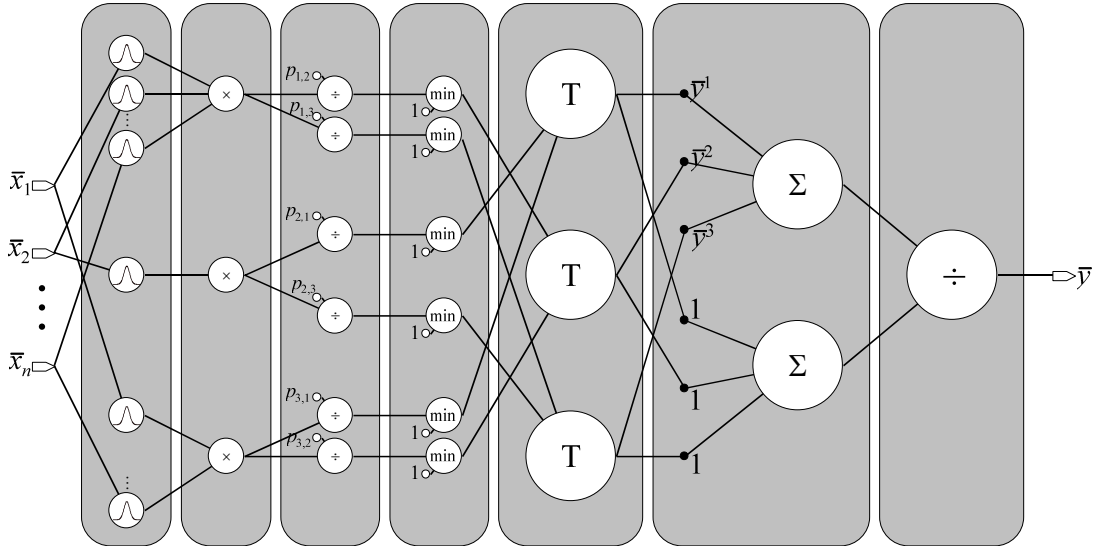
$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(1 - \prod_{q=1}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right) \right]}{\sum_{k=1}^N T \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left(1 - \prod_{q=1}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}}^j (\bar{x}_{d_q^j}) \right) \right]} \quad (4.35)$$

Reguła Goguena (struktura rozszerzona)

Po zastosowaniu definicji iloczynu kartezjańskiego typu minimum (2.18), uzyskujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1, \frac{p_{j,k}}{\min_{q=1 \dots n_j} \left\{ \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right\}} \right]}{\sum_{k=1}^N T \min_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \left[1, \frac{p_{j,k}}{\min_{q=1 \dots n_j} \left\{ \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right\}} \right]} \quad (4.36)$$

Rysunek 4.14 przedstawia strukturę systemu rozmyto-neuronowego opisanego wzorem (4.36).



Rys. 4.14. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Goguena z niepełnymi regułami.

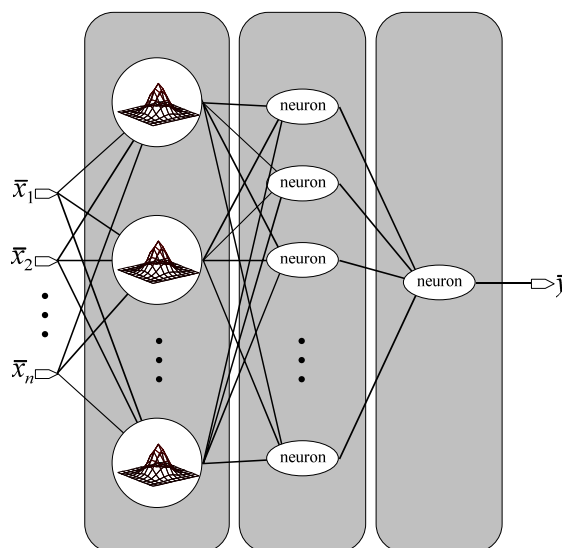
Stosując natomiast definicję iloczynu kartezjańskiego typu iloczyn (2.19), otrzymujemy

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k \cdot T \left[1 - \prod_{q=1}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right]}{\sum_{k=1}^N T \left[1 - \prod_{q=1}^{n_j} \mu_{A_{d_q^j}^j}(\bar{x}_{d_q^j}) \right]} \quad (4.37)$$

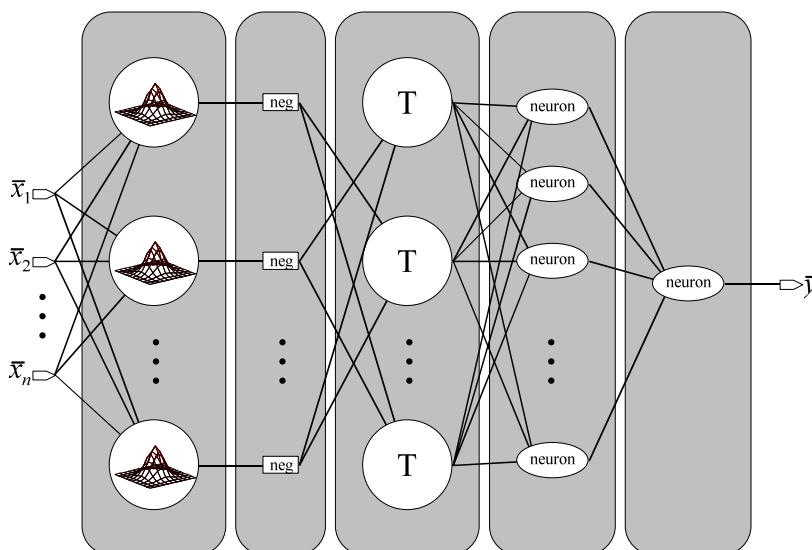
Analogiczne modyfikacje można przeprowadzić dla pozostałych struktur opisanych w rozdziale 3.

4.4 Struktury z siecią neuronową realizującą wyostrzanie

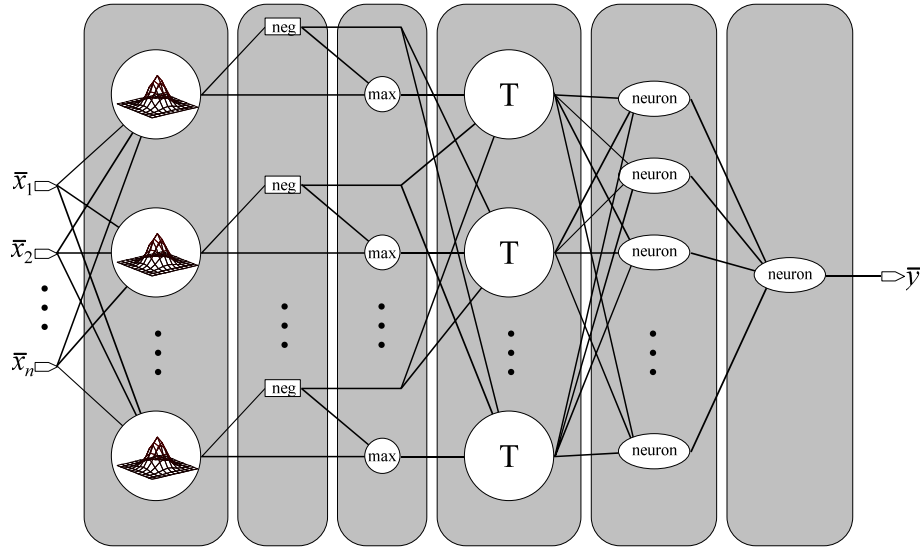
Jak wiadomo, sieci neuronowe są skutecznym narzędziem do modelowania funkcji. Nie ma też przeszkód aby właśnie za pomocą sieci neuronowej zrealizować operację opisaną wzorem (3.3), czyli wyostrzanie. W pracach [50], [51] i [53] podjęto z powodzeniem taką próbę. Zaproponowano i przebadano zastosowanie sztucznej sieci neuronowej realizującej operację wyostrzania w systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem według reguły Mamdaniego i Larsena. Podobny zabieg można zastosować dla do pozostałych struktur opisanych w rozdziale 3. Na rysunkach 4.15÷4.18 przedstawiono kilka przykładów.



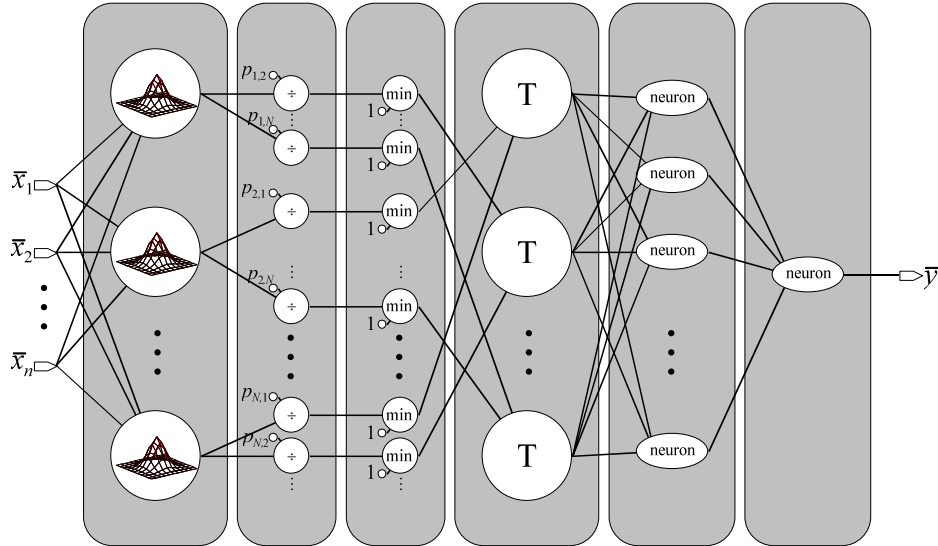
Rys. 4.15. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego i Larsena z siecią neuronową realizującą operację wyostrzania.



Rys. 4.16. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza i probabilistycznej z siecią neuronową realizującą operację wyostrzania.



Rys. 4.17. Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha i Willmotta z siecią neuronową realizującą operację wyostrzania.



Rys. 4.18. Rozszerzona struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Goguena z siecią neuronową realizującą operację wyostrzania.

4.5 Rozmywanie typu non-singleton

Przy wyprowadzaniu struktur w punktach 3.2 i 3.3 przyjęto rozmywanie typu *singleton* (3.1). Stosując wyprowadzone struktury można również modelować rozmywanie typu *non-singleton*, poprzez modyfikację zbiorów rozmytych A^k . Aby system rozmyto-neuronowy z rozmywaniem typu *singleton* odpowiadał funkcjonalnie systemowi z rozmywaniem typu *non-singleton* musi być spełniona równość

$$\mu_{B'}(\bar{y}^k) = \mu_{\underline{B}}(\bar{y}^k) \quad (4.38)$$

Dla odróżnienia od systemów z rozmywaniem typu *singleton*, parametry systemów z rozmywaniem *non-singleton* będą wyróżnione podkreśleniem, np. $\underline{\sigma}_i^k$ w miejsce σ_i^k dla systemu z rozmywaniem typu *singleton*. Dla systemów z modelem lingwistycznym typu konstruktywnego zbiór rozmyty B' jest określony przez (2.79), natomiast dla systemów z modelem lingwistycznym typu destrukcyjnego, przez (2.84). W obu przypadkach równość (4.38) można przedstawić w postaci układu

$$\begin{cases} \mu_{B'^k}(\bar{y}^k) = \mu_{\underline{B}^k}(\bar{y}^k) \\ \mu_{B'^j}(\bar{y}^k) = \mu_{\underline{B}^j}(\bar{y}^k) \end{cases} \quad (4.39)$$

Konkretne postaci zbiorów rozmytych B'^k i B'^j dla systemów z różną regułą wnioskowania zostały podane przy omawianiu tych systemów. Zbiory $\underline{B}^k$ i $\underline{B}^j$ zgodnie z (2.77) są określone jako

$$\mu_{\underline{B}^k}(\bar{y}^k) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x})^T \mu_{\underline{A}^k \rightarrow B^k}(\mathbf{x}, \bar{y}^k) \right\} \quad (4.40)$$

oraz

$$\mu_{\underline{B}^j}(\bar{y}^k) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x})^T \mu_{\underline{A}^j \rightarrow B^j}(\mathbf{x}, \bar{y}^k) \right\} \quad (4.41)$$

Zakłada się, że zbiory rozmyte B^k i B^j pozostają bez zmian w obu systemach. Poniżej zostaną wyznaczone zbiory rozmyte A^k systemów rozmyto-neuronowych z rozmywaniem typu *singleton*, modelujących rozmywanie typu *non-singleton* przy różnych regułach rozmytej implikacji.

Reguła Mamdaniego

Dla reguły Mamdaniego (2.81), zgodnie z (3.9) i (3.10) otrzymujemy

$$\begin{cases} \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x})^T \min \left[\mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \right] \right\} \\ 0 = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x})^T \min \left[\mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x}), \mu_{B^j}(\bar{y}^k) \right] \right\} \end{cases} \quad (4.42)$$

Równanie drugie układu jest tożsamością, jeśli tylko jest spełnione założenie (3.6). Zatem, uwzględniając założenie (3.5) o normalności zbiorów B^k , zbiór rozmyty A^k jest określony przez

$$\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T * \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \right\} \quad (4.43)$$

Korzystając z wzoru (4.43), znając postać zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$, można w ogólnym przypadku wyznaczyć wartości funkcji przynależności zbioru A^k dla dowolnych $\bar{\mathbf{x}}$. Należy zauważyć, że definicja zbioru $\underline{A}'$ zależy od wartości $\bar{\mathbf{x}}$.

Reguła Larsena

Dla reguły Larsena (2.82), zgodnie z (3.16) i (3.17) otrzymujemy

$$\begin{cases} \mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T * [\mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{B^k}(\bar{\mathbf{y}}^k)] \right\} \\ 0 = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T * [\mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{B^j}(\bar{\mathbf{y}}^k)] \right\} \end{cases} \quad (4.44)$$

Równanie drugie układu jest tożsamością, jeśli tylko jest spełnione założenie (3.6). Zatem, uwzględniając założenie (3.5) o normalności zbiorów B^k , zbiór rozmyty A^k jest określony przez

$$\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T * \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \right\} \quad (4.45)$$

Korzystając ze wzoru (4.45), znając postać zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$, można w ogólnym przypadku wyznaczyć wartości funkcji przynależności zbioru A^k dla dowolnych $\bar{\mathbf{x}}$.

Reguła binarna

Dla reguły binarnej (2.87), zgodnie z (3.24) i (3.25) otrzymujemy

$$\begin{cases} 1 = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T * \max[1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(\bar{\mathbf{y}}^k)] \right\} \\ 1 - \mu_{A^j}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T * \max[1 - \mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x}), \mu_{B^j}(\bar{\mathbf{y}}^k)] \right\} \end{cases} \quad (4.46)$$

Równanie pierwsze układu jest tożsamością, jeśli tylko jest spełnione założenie (3.5) o normalności zbiorów B^k . Zatem, uwzględniając założenie (3.6), zbiór rozmyty A^k jest określony przez

$$\mu_{A^k}(\bar{\mathbf{x}}) = 1 - \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T * [1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x})] \right\} \quad (4.47)$$

Korzystając ze wzoru (4.47), znając postać zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$, można w ogólnym przypadku wyznaczyć wartości funkcji przynależności zbioru A^k dla dowolnych $\bar{x}$.

Reguła Łukasiewicza

Dla reguły Łukasiewicza (2.88), zgodnie z (3.33) i (3.34) otrzymujemy

$$\begin{cases} 1 = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \min \left[1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) + \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \right] \right\} \\ 1 - \mu_{A'}(\bar{x}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \min \left[1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) + \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \right] \right\} \end{cases} \quad (4.48)$$

Równanie pierwsze układu jest tożsamością, jeśli tylko jest spełnione założenie (3.5) o normalności zbiorów B^k . Zatem, uwzględniając założenie (3.6), zbiór rozmyty A^k jest określony przez

$$\mu_{A^k}(\bar{x}) = 1 - \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \left[1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \right] \right\} \quad (4.49)$$

Korzystając ze wzoru (4.49), znając postać zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$, można w ogólnym przypadku wyznaczyć wartości funkcji przynależności zbioru A^k dla dowolnych $\bar{x}$.

Reguła Zadeha

Dla reguły Zadeha (2.89), zgodnie z (3.41) i (3.42) otrzymujemy

$$\begin{cases} \max \left[\mu_{A^k}(\bar{x}), 1 - \mu_{A^k}(\bar{x}) \right] = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \max \left\{ \min \left[\mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \right], 1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \right\} \right\} \\ 1 - \mu_{A'}(\bar{x}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \max \left\{ \min \left[\mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}), \mu_{B^k}(\bar{y}^k) \right], 1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \right\} \right\} \end{cases} \quad (4.50)$$

Równanie pierwsze układu jest tożsamością jeśli tylko jest spełnione założenie (3.5) o normalności zbiorów B^k i normalny jest również zbiór $\underline{A}'$. Zatem, uwzględniając założenie (3.6), zbiór rozmyty A^k jest określony przez

$$\mu_{A^k}(\bar{x}) = 1 - \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \left[1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \right] \right\} \quad (4.51)$$

Korzystając ze wzoru (4.51), znając postać zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$, można w ogólnym przypadku wyznaczyć wartości funkcji przynależności zbioru A^k dla dowolnych $\bar{x}$.

Reguła probabilistyczna

Dla reguły probabilistycznej (2.93), zgodnie z (3.49) i (3.50) otrzymujemy

$$\begin{cases} 1 = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \min \left[1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) + \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{\underline{B}^k}(\bar{y}^k) \right] \right\} \\ 1 - \mu_{\underline{A}^k}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \min \left[1 - \mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x}) + \mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x}) \cdot \mu_{\underline{B}^j}(\bar{y}^k) \right] \right\} \end{cases} \quad (4.52)$$

Równanie pierwsze układu jest tożsamością, jeśli tylko jest spełnione założenie (3.5) o normalności zbiorów B^k . Zatem, uwzględniając założenie (3.6), zbiór rozmyty A^k jest określony przez

$$\mu_{\underline{A}^k}(\bar{\mathbf{x}}) = 1 - \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T [1 - \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x})] \right\} \quad (4.53)$$

Korzystając ze wzoru (4.53), znając postać zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$, można w ogólnym przypadku wyznaczyć wartości funkcji przynależności zbioru A^k dla dowolnych $\bar{\mathbf{x}}$.

Reguła ograniczonej sumy

Dla reguły ograniczonej sumy (2.94), zgodnie z (3.65) i (3.66) otrzymujemy

$$\begin{cases} 1 = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \min \left[1, \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) + \mu_{\underline{B}^k}(\bar{y}^k) \right] \right\} \\ \mu_{\underline{A}^j}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \min \left[1, \mu_{\underline{A}^j}(\mathbf{x}) + \mu_{\underline{B}^j}(\bar{y}^k) \right] \right\} \end{cases} \quad (4.54)$$

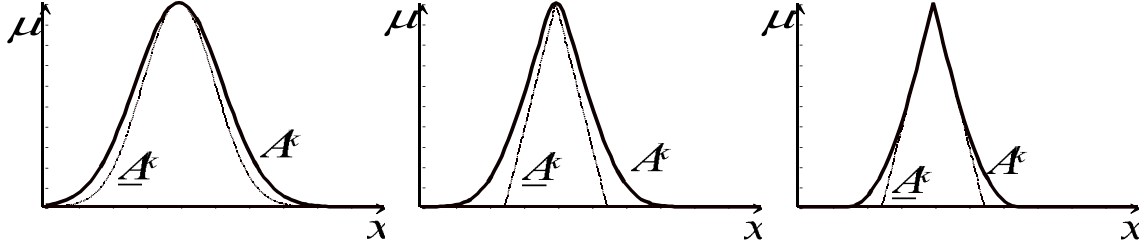
Równanie pierwsze układu jest tożsamością, jeśli tylko jest spełnione założenie (3.5) o normalności zbiorów B^k . Zatem, uwzględniając założenie (3.6), zbiór rozmyty A^k jest określony przez

$$\mu_{\underline{A}^k}(\bar{\mathbf{x}}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} \left\{ \mu_{\underline{A}'}(\mathbf{x})^T \mu_{\underline{A}^k}(\mathbf{x}) \right\} \quad (4.55)$$

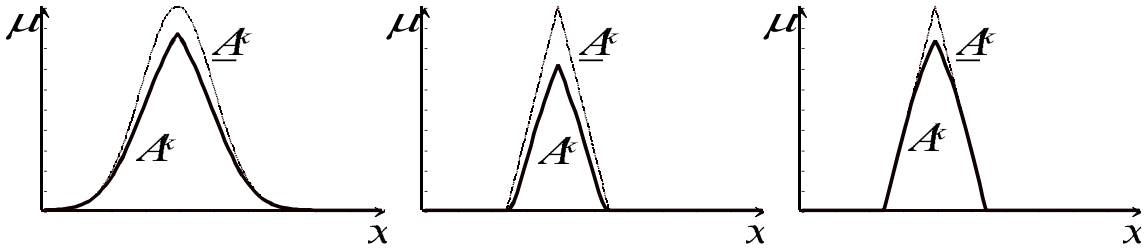
Korzystając ze wzoru (4.55), znając postać zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$, można w ogólnym przypadku wyznaczyć wartości funkcji przynależności zbioru A^k dla dowolnych $\bar{\mathbf{x}}$.

Jak widać z otrzymanych wyników struktury można podzielić na dwie grupy, w których modelowanie rozmywania *non-singleton* przeprowadza się za pomocą identycznych zmian zbiorów $\underline{A}^k$. Do pierwszej z grup należą struktury z wnioskowaniem Mamdaniego, Larsena i ograniczonej sumy, natomiast do drugiej – z wnioskowaniem binarnym, Łukasiewicza, Zadeha i probabilistycznym.

Na rysunkach 4.19 i 4.20 zostaną przedstawione przykłady wyznaczonych funkcji przynależności zbioru rozmytego A^k , na podstawie znanych zbiorów $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$. Kolejne rysunki dotyczą przypadków, gdy zbiory rozmyte $\underline{A}'$ i $\underline{A}^k$ są opisane funkcjami przynależności Gaussa, Gaussa i trójkątną, trójkątnymi.



Rys. 4.19. Przykłady wyznaczania zbioru A^k dla modelowania rozmywania typu *non-singleton* przez system z wnioskowaniem wg Mamdaniego, Larsena i ograniczonej sumy.



Rys. 4.20. Przykłady wyznaczania zbioru A^k dla modelowania rozmywania typu *non-singleton* przez system z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza, Zadeha, Willmotta i probabilistycznej.

Przypadek szczególny

Przyjmijmy teraz następujące założenia: T -norma jest określona przez operację iloczynu (2.43), zbiory rozmyte $\underline{A}^k$ są iloczynami kartezjańskimi (2.16) zbiorów rozmytych $\underline{A}_i^k$, iloczyn kartezjański jest realizowany przez operację iloczynu (2.19). Przy tych założeniach wzory (4.43), (4.45) lub (4.55) przyjmują postać

$$\mu_{A^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \sup_{x_1, x_2, \dots, x_n \in X} \left\{ \prod_{i=1}^n [\mu_{\underline{A}_i'}(x_i) \cdot \mu_{\underline{A}_i^k}(x_i)] \right\} \quad (4.56)$$

Jeśli ponadto funkcje przynależności zbiorów rozmytych $\underline{A}_i^k$ i $\underline{A}_i'$ są krzywymi gaussowskimi (2.8), przy czym środek zbioru rozmytego $\underline{A}_i'$ leży w punkcie $\bar{x}_i$, to otrzymamy

$$\mu_{A^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \max_{x_1, x_2, \dots, x_n \in X} \left\{ \prod_{i=1}^n \left[\exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_i'} \right)^2 \right) \cdot \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^k}{\sigma_i^k} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (4.57)$$

co możemy zapisać również w wygodniejszej formie

$$\mu_{A^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \prod_{i=1}^n \max_{x_i \in X_i} \left\{ \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i}{\underline{\sigma}'_i} \right)^2 \right) \cdot \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^k}{\underline{\sigma}_i^k} \right)^2 \right) \right\} \quad (4.58)$$

Aby znaleźć wartość x_i punktu, dla którego funkcja w nawiasach klamrowych we wzorze (4.58) osiąga maksimum, przyrównujemy jej pochodną do zera

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i}{\underline{\sigma}'_i} \right)^2 \right) \cdot \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^k}{\underline{\sigma}_i^k} \right)^2 \right) = 0 \quad (4.59)$$

Otrzymana w ten sposób wartość x_i jest następująca

$$x_i = \frac{(\underline{\sigma}'_i)^2 \cdot \bar{x}_i^k + (\underline{\sigma}_i^k)^2 \cdot \bar{x}_i}{(\underline{\sigma}'_i)^2 + (\underline{\sigma}_i^k)^2} \quad (4.60)$$

Wyrażenie (4.60) podstawiamy do wzoru (4.58), co daje rezultat

$$\mu_{A^k}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \prod_{i=1}^n \exp \left(- \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_i^k)^2}{(\underline{\sigma}'_i)^2 + (\underline{\sigma}_i^k)^2} \right) \quad (4.61)$$

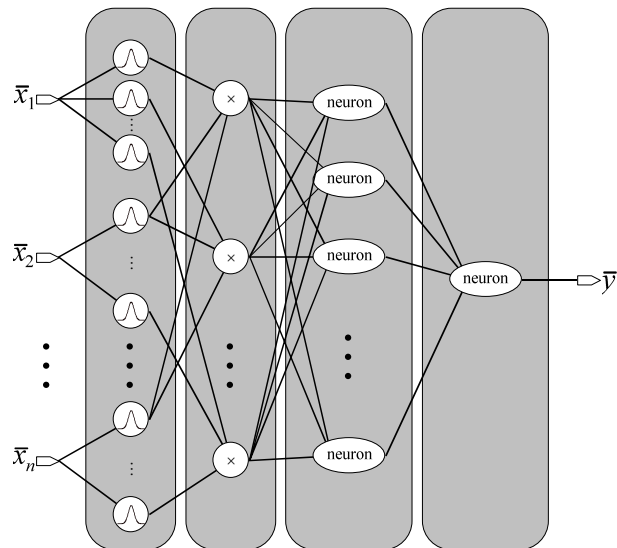
czyli

$$\begin{cases} \bar{x}_i^k = \bar{x}_i \\ \underline{\sigma}_i^k = \sqrt{(\underline{\sigma}'_i)^2 + (\underline{\sigma}_i^k)^2} \end{cases} \quad (4.62)$$

W monografii [50] powyższą zależność wyprowadzono dla reguły implikacji Larsena, nie ograniczając rozważań do punktów $\bar{y}^k$, czyli dla ogólnie rozumianych systemów rozmytych, nie tylko rozmyto-neuronowych. W niniejszej pracy dzięki przyjęciu tego ograniczenia wynikającego z (3.4), charakterystycznego dla systemów rozmyto-neuronowych, rozszerzono możliwość modelowania rozmywania typu *non-singleton* na większą grupę systemów.

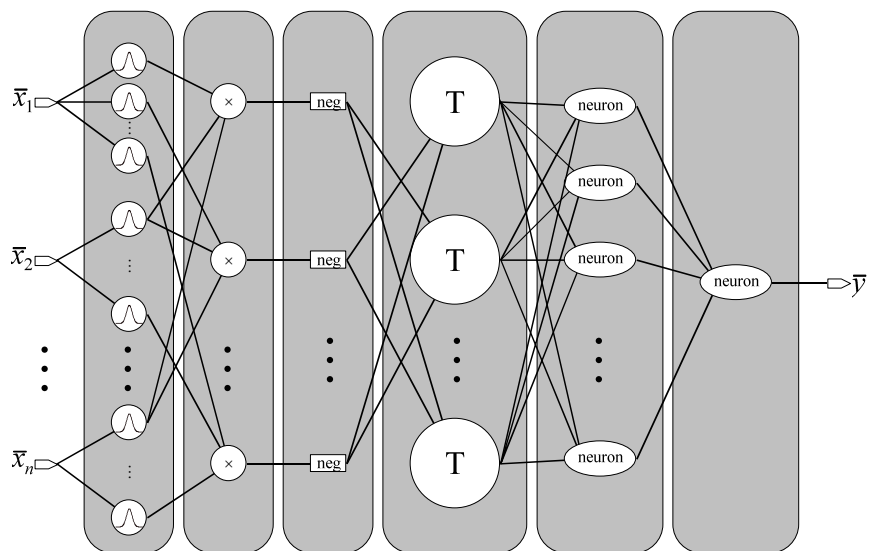
4.6 Łączenie modyfikacji

W rozdziale 4 zostały przedstawione modyfikacje rozmyto-neuronowych systemów wnioskujących opisanych w rozdziale 3. Mimo, że poszczególne modyfikacje omawiane były oddzielne, nie ma przeciwwskazań, aby zależnie od potrzeb stosować je jednocześnie. Na rysunkach od 4.21 do 4.24 zostało zamieszczonych kilka przykładów.

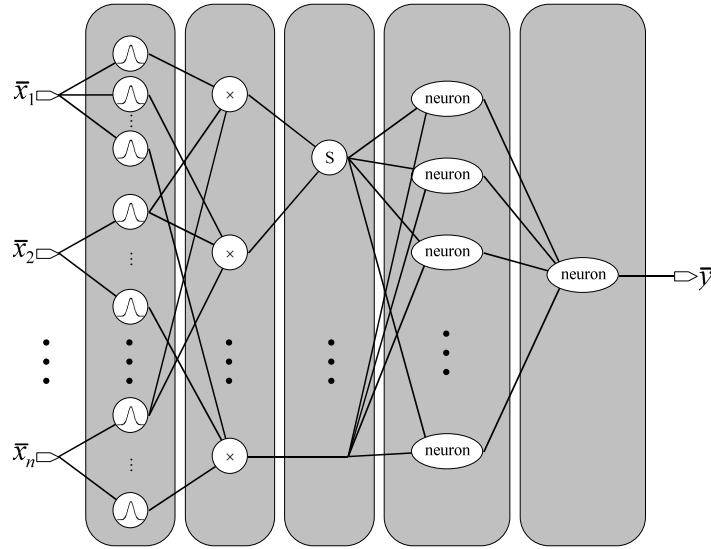


Rys. 4.21. Przykład uproszczonej struktury z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego i Larsena z wyostrzaniem za pomocą sieci neuronowej.

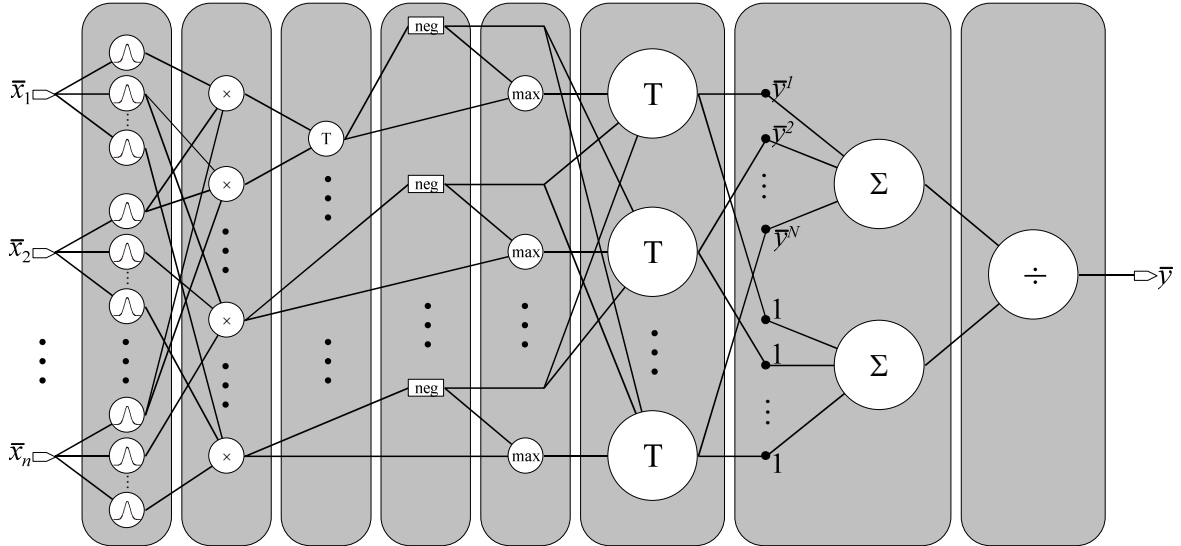
Strukturę pokazaną na rysunku 4.21 przedstawiono już w pracach [49], [50], [51] i [53].



Rys. 4.22. Przykład uproszczonej struktury z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza i probabilistycznej z wyostrzaniem za pomocą sieci neuronowej.



Rys. 4.23. Przykład uproszczonej struktury z rozbudowanymi poprzednikami reguł z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego i Larsena z wyostrzaniem za pomocą sieci neuronowej.



Rys. 4.24. Przykład uproszczonej struktury z rozbudowanymi poprzednikami reguł z wnioskowaniem wg reguły Zadeha i Willmotta.

4.7 Spostrzeżenie

Niech tworzony system rozmyto-neuronowy o n wejściach x_i , zawiera N reguł R^k , których poprzedniki składają się z $m=n$ części połączonych spójnikiem **I**. Jest to przypadek (4.17) omawiany w punkcie 4.2. Reguły rozpatrywanego systemu można zatem sprowadzić do ogólnego przypadku (2.74), gdzie

$$A^k = \bigcap_{l=1}^n A^{k,l} \quad (4.63)$$

czyli

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = T_{l=1}^n(\mu_{A^{k,l}}(\mathbf{x})) \quad (4.64)$$

Niech poszczególne części poprzedników reguł będą niepełne, jak omawiane w punkcie 4.3. Załóżmy szczególny przypadek, gdy $n_{k,l}=1$ (ilość zmiennych występujących w części l poprzednika reguły R^k) dla każdego $k=1\dots N$ i $l=1\dots n$, oraz $d_q^{k,l}=l$, czyli $x_{d_q^{k,l}}=x_l$, a $A_{d_q^{k,l}}^k = A_l^k$. Reguła R^k przyjmuje zatem postać

$$R^k : \text{ JEŻELI } x_1 \text{ jest } A_1^k \text{ I } x_2 \text{ jest } A_2^k \text{ I } \dots \text{ I } x_n \text{ jest } A_n^k \text{ TO } y \text{ jest } B^k \quad (4.65)$$

W tym przypadku zarówno wzór (2.18) jak i (2.19) prowadzą do

$$\mu_{A^{k,l}}(\mathbf{x}) = \mu_{A_l^k}(x_l) \quad (4.66)$$

Podstawiając (4.66) do (4.64) otrzymujemy

$$\mu_{A^k}(\mathbf{x}) = T_{l=1}^n(\mu_{A_l^k}(x_l)) \quad (4.67)$$

Zauważmy, że reguła postaci (4.65) jest identyczna jak dla ogólnego przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych (2.75). Porównując wzór (4.67) z (2.18) i (2.19) widzimy, że różni się on tym, że zamiast operacji minimum lub iloczynu realizującego operację iloczynu kartezjańskiego znajduje się bardziej ogólny operator T -normy. Jeżeli za definicję T -normy również przyjmiemy operację minimum lub iloczynu, to uzyskamy struktury dokładnie takie same jak w punkcie 3.5, jednak pojęcie T -normy jest znacznie szersze.

5 USTALANIE PARAMETRÓW SYSTEMÓW ROZMYTO-NEURONOWYCH

Rozdział ten zawiera omówienie wybranych metod doboru parametrów systemów rozmyto-neuronowych. Opis ten poprzedzony został wyszczególnieniem parametrów jakie występują w tego rodzaju architekturach, i których wartości mogą podlegać zmianom.

5.1 Parametry systemów rozmyto-neuronowych

W trakcie projektowania systemu rozmyto-neuronowego, oprócz wyboru struktury (architektury) konieczne jest ustalenie wartości parametrów. Ich liczba zależy głównie od wielkości systemu (ilości reguł). Parametry występujące w omawianych strukturach rozmyto-neuronowych możemy podzielić na następujące grupy:

1. Parametry zbiorów rozmytych A^k określonych w poprzednikach reguł. W przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych (p. 2.1.3 i 3.5) są to parametry zbiorów A_i^k . Jakże są to konkretnie parametry zależy do zastosowanych funkcji przynależności tych zbiorów. Dla gaussowskich funkcji przynależności (2.8) są to środki $\bar{x}_i^k$ i szerokości tych funkcji σ_i^k . Dla trójkątnych funkcji przynależności (2.9) są to parametry a_i^k , b_i^k i c_i^k lub a_i^k , b_i^k i $\bar{x}_i^k$ dla funkcji opisanych wzorem (2.10). Dla funkcji przynależności klasy s (2.11) są to parametry a_i^k , b_i^k i c_i^k , dla klasy π (2.12) - a_i^k , b_i^k , c_i^k , d_i^k i e_i^k , dla klasy γ (2.13) oraz klasy L (2.14) - a_i^k i b_i^k . W przypadku zależnych zmiennych lingwistycznych i zastosowaniu elipsoidalnej funkcji przynależności (2.22) dobrać należy wektory $\bar{\mathbf{x}}^k$, macierze $\mathbf{Q}^k$ i współczynniki α^k .
2. Parametry zbiorów rozmytych B^k określonych w następnikach reguł. W strukturach przedstawionych w punktach 3.2 i 3.3 wykorzystywany jest tylko jeden parametr zbiorów rozmytych B^k , określający punkt $\bar{y}^k$, w którym funkcja przynależności przyjmuje wartość maksymalną równą 1, zgodnie z założeniem (3.5). Nie jest zatem istotne jakiej klasy zbiory rozmyte zostaną zastosowane, jak i ich pozostałe parametry. W przypadku struktur rozszerzonych przedstawionych w punkcie 3.4 istotny jest dobór funkcji przynależności jak i jej pozostałe parametry, na podstawie których wyznacza się współczynniki $p_{j,k}$ wyrażone wzorem (3.109).

3. Niektórzy autorzy (np. [43]) proponują wprowadzenie dodatkowego parametru α^k dla każdej reguły, określającego stopień jej ważności.

Stosunkowo najprostszy przypadek występuje, gdy dysponujemy wiedzą, uzyskaną np. od eksperta, wyrażoną w postaci reguł (2.74) lub ich modyfikacji (2.75). Znając specyfikę problemu, można dobrać odpowiednie klasy zbiorów rozmytych i ich parametry. Niestety, jak pokazuje praktyka, tak stworzony system wymaga zwykle dostrojenia innymi metodami.

Systemy rozmyto-neuronowe posiadają cechy rozmytych systemów wnioskujących oraz sieci neuronowych. Do doboru ich parametrów można zatem stosować metody opracowane dla jednych i drugich. Poniżej zostaną przedstawione wybrane z nich.

5.2 Gradientowa metoda uczenia

Jak już wcześniej wspomniano, rozmyto-neuronowy system wnioskujący działa w sposób podobny do sieci neuronowej, przesyła informację z wejścia poprzez poszczególne bloki funkcjonalne do wyjścia. Można zatem, tak jak to opisano już m.in. w pracach [48], [32], [62], [69], [49] i [50], uczyć system metodą wstecznej propagacji błędów. Sposób modyfikacji parametru (np. σ_i^k) w iteracji t wynika z metody największego spadku i jest wyrażony wzorem

$$\sigma_i^k(t+1) = \sigma_i^k(t) - \eta \frac{\partial Q(\bar{\mathbf{x}}, d; t)}{\partial \sigma_i^k(t)} \quad (5.1)$$

gdzie η jest współczynnikiem określającym szybkość uczenia, Q - miarą błędu uzyskanego dla danej wartości $\bar{\mathbf{x}}$ podanej na wejścia systemu względem wartości d oczekiwanej na jego wyjściu. Jest ona zdefiniowana następująco

$$Q(\bar{\mathbf{x}}, d) = \frac{1}{2} [\bar{y}(\bar{\mathbf{x}}) - d]^2 \quad (5.2)$$

Korektę wartości parametru opisaną wzorem (5.1) przeprowadza się dla każdego elementu ciągu uczącego składającego się z par $(\bar{\mathbf{x}}, d)$ zawierających wartości wejściowe $\bar{\mathbf{x}}$ i wzorcowe odpowiedzi d . Proces powtarza się aż do spełnienia warunku końcowego, którym może być np. spadek miary błędu poniżej określonego poziomu, spadek gradientu miary błędu po kolejnych iteracjach, lub osiągnięcie limitu iteracji (epok). Epoką nazywamy ciąg kolejnych iteracji, w których dokładnie raz wykorzystano wszystkie elementy ciągu uczącego. W każdej kolejnej epoce elementy ciągu uczącego mogą być przedstawiane w tej samej lub innej, losowej kolejności.

Stosuje się również zmodyfikowaną, tzw. momentową metodę wstecznej propagacji błędów, w której wzór (5.1) przyjmuje postać

$$\sigma_i^k(t+1) = \sigma_i^k(t) - \eta \frac{\partial Q(\bar{\mathbf{x}}, d; t)}{\partial \sigma_i^k(t)} + \alpha [\sigma_i^k(t) - \sigma_i^k(t-1)] \quad (5.3)$$

gdzie parametr $\alpha \in [0,1]$.

Konkretna postać pochodnej we wzorach (5.1) i (5.3) zależy od modyfikowanego parametru i może być inna dla poszczególnych struktur. W trakcie uczenia sieci neuronowych metodą wstecznej propagacji, błąd jest obliczany na wyjściu ostatniej warstwy, a następnie propagowany wstecz, aż do parametrów w warstwie pierwszej. Każdy element sieci (neuron) przekazuje błąd ze swojego wyjścia na każde z wejść, mnożąc go przez pochodną wyjścia po danym wejściu. Błąd ten jest przekazywany na wyjście neuronu połączonego z danym wejściem. Jeżeli wyjście elementu jest połączone z większą niż jeden liczbą wejść elementów z następnej warstwy, to błąd propagowany wstecz przez ten element jest sumą błędów przekazanych na jego wyjście. Identyczną metodologię w stosunku do struktur rozmyto-neuronowych z wnioskowaniem według reguł Mamdaniego lub Larsena (3.13) wykorzystywanych jako sterowniki rozmyte oraz ich modyfikacji zastosowano w pracy [46]. Jej autor metodologię tą zaimplementował w programie FLiNN [45] umożliwiającym modelowanie takich struktur. Algorytm jest na tyle uniwersalny, że nie ma żadnych przeszkód, aby rozszerzyć jego wykorzystanie na wszystkie struktury opisane w rozdziale 3. Konieczne jest jedynie wyznaczenie pochodnych wyjść względem wejść dla wszystkich bloków użytych do budowy tych struktur. Poniżej zostaną przedstawione rezultaty odpowiednich wyliczeń, przy czym wyniki dla bloków realizujących wagę, jej węzeł, sumowanie, mnożenie, dzielenie, operacje minimum i maksimum, funkcję eksponencjalną, funkcję gaussowską i o kształcie trójkąta można znaleźć razem z wyprowadzeniami w pracy [46].

Waga

Ten element nie posiada wejścia, przechowuje natomiast wartość parametru, którą podaje na wyjściu.

$$y = w \quad (5.4)$$

Modyfikację wartości wagi określa wzór

$$w(t+1) = w(t) - \eta \varepsilon(t) \quad (5.5)$$

lub

$$w(t+1) = w(t) - \eta \varepsilon(t) + \alpha [w(t) - w(t-1)] \quad (5.6)$$

w przypadku metody wstecznej propagacji błędów z uwzględnieniem tzw. momentum.

Węzeł wagi

Element ten mnoży dwie wartości wejściowe x i w .

$$y = w \cdot x \quad (5.7)$$

W trakcie procesu uczenia jest propagowany błąd na wejście w

$$\varepsilon_w = x \cdot \varepsilon \quad (5.8)$$

oraz na wejście x

$$\varepsilon_x = w \cdot \varepsilon \quad (5.9)$$

Sumowanie

Element ten sumuje n sygnałów wejściowych x_i

$$y = \sum_{i=1}^n x_i \quad (5.10)$$

Błąd propagowany na każde z wejść jest równy błędowi podanemu na jego wyjście

$$\varepsilon_{x_i} = \varepsilon \quad (5.11)$$

Mnożenie

Element mnoży n sygnałów wejściowych x_i

$$y = \prod_{i=1}^n x_i \quad (5.12)$$

Błąd propagowany na wejście i równy jest iloczynowi sygnału podanego na wyjście elementu i wartości podanych na pozostałe wejścia

$$\varepsilon_{x_i} = \varepsilon \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \quad (5.13)$$

Dzielenie

Element dzieli wartość z wejścia a przez wartość z wejścia b

$$y = \frac{a}{b} \quad (5.14)$$

Wartość błędu propagowana na wejście a wynosi

$$\varepsilon_a = \frac{1}{b} \varepsilon \quad (5.15)$$

natomiast na wejście b

$$\varepsilon_b = -\frac{a}{b^2} \varepsilon \quad (5.16)$$

Minimum

Element wyznacza najmniejszą wartość z podanych na jedno z n wejść

$$y = \min_{i=1..n} \{x_i\} \quad (5.17)$$

Funkcja przez niego realizowana nie jest różniczkowalna, nie można zatem policzyć pochodnej $\frac{\partial y}{\partial x_i}$. W pracy [46] proponuje się zastosowanie alternatywnych rozwiązań.

Pierwsza z możliwości to przesyłanie na wszystkie wejścia tego samego błędu

$$\varepsilon_{x_i} = \varepsilon \quad (5.18)$$

Drugie rozwiązanie, wykorzystane m.in. w programie FLiNN, to przekazywanie błędu wyłącznie na te wejścia, z których pochodzi wartość minimalna, podawana na wyjście

$$\varepsilon_{x_i} = \begin{cases} \varepsilon & \text{jeżeli } x_i = y \\ 0 & \text{jeżeli } x_i \neq y \end{cases} \quad (5.19)$$

Trzecia możliwość polega na przekazywaniu błędu, o wartości zależnej od wartości wejściowej, na takiej zasadzie aby dla wejść, na których wartości są bliższe wartości minimalnej wartość propagowanego błędu była większa, np.

$$\varepsilon_{x_i} = (1 + y - x_i) \cdot \varepsilon \quad (5.20)$$

Wydaje się, że podobnych metod można tworzyć wiele.

Maksimum

Element wyznacza największą wartość z podanych na jedno z n wejść

$$y = \max_{i=1..n} \{x_i\} \quad (5.21)$$

Funkcja realizowana przez ten element nie jest różniczkowalna, podobnie jak w przypadku realizacji funkcji minimum - nie można wyliczyć pochodnej $\frac{\partial y}{\partial x_i}$. Możliwe jest jednak zastosowanie analogicznych metod propagacji błędów jak w przypadku funkcji minimum. Pierwszy sposób to przesyłanie na wszystkie wejścia tego samego błędu (5.18). Drugie rozwiązanie, wykorzystane m.in. w programie FLiNN, to przekazywanie błędu wyłącznie na te wejścia, z których pochodzi maksymalna wartość wejściowa, według wzoru (5.19). Trzecia możliwość polega na wyliczeniu wartości błędu zależnej od wartości wejściowej, na takiej zasadzie, aby dla wejść o wartościach są bliższych wartości maksymalnej, wartość propagowanego błędu była większa, np.

$$\varepsilon_{x_i} = (1 + x_i - y) \cdot \varepsilon \quad (5.22)$$

Funkcja sigmoidalna

Funkcja ta jest jedną z najczęściej wykorzystywanych funkcji aktywacji neuronów sztucznych sieci neuronowych zastosowanych w punkcie 4.4. Jest ona opisana wzorem

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\beta \cdot x}} \quad (5.23)$$

gdzie $\beta > 0$.

Wartość błędu propagowanego przez element realizujący tę funkcję wynosi

$$\varepsilon_x = \beta \frac{e^{\beta \cdot x}}{(1 + e^{\beta \cdot x})^2} \varepsilon = \beta \cdot y \cdot (1 - y) \cdot \varepsilon \quad (5.24)$$

Jeżeli uczony jest także parametr β , to błąd propagowany na jego wejście jest wyrażony przez

$$\varepsilon_\beta = x \frac{e^{\beta \cdot x}}{(1 + e^{\beta \cdot x})^2} \varepsilon = x \cdot y \cdot (1 - y) \cdot \varepsilon \quad (5.25)$$

Funkcja gaussowska

Funkcja ta opisana jest wzorem (2.8). Jest ona używana jako funkcja przynależności. Element realizujący tę funkcję posiada trzy wejścia x , $\bar{x}$ i σ , na które przekazywany jest błąd z wejścia zgodnie z wzorami

$$\varepsilon_x = -\exp\left[-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \frac{2(x-\bar{x})}{\sigma^2} \cdot \varepsilon = -y \cdot \frac{2(x-\bar{x})}{\sigma^2} \cdot \varepsilon \quad (5.26)$$

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \exp\left[-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \frac{2(x-\bar{x})}{\sigma^2} \cdot \varepsilon = y \cdot \frac{2(x-\bar{x})}{\sigma^2} \cdot \varepsilon \quad (5.27)$$

$$\varepsilon_{\sigma} = \exp\left[-\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right] \cdot \frac{2(x-\bar{x})^2}{\sigma^3} \cdot \varepsilon = y \cdot \frac{2(x-\bar{x})^2}{\sigma^3} \cdot \varepsilon \quad (5.28)$$

Funkcja o kształcie trójkąta

Funkcja ta, opisana wzorem (2.9) lub (2.10) jest wykorzystywana jako funkcja przynależności. Funkcja ta posiada trzy punkty nie różniczkowalne. Jednym ze sposobów pokonania tej trudności jest przyjęcie w tych punktach wartości pochodnej równej średniej pochodnej lewo- i prawostronnej. Błąd propagowany na kolejne wejścia dla funkcji wyrażonej wzorem (2.9) wynosi zatem

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x > c \\ \frac{1}{2(b-a)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = a \\ \frac{1}{b-a} \cdot \varepsilon & \text{dla } a < x < b \\ \frac{c-2b+a}{2(c-b)(b-a)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = b \\ -\frac{1}{c-b} \cdot \varepsilon & \text{dla } b < x < c \\ -\frac{1}{2(c-b)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = c \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_a = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x > b \\ \frac{1}{2(b-a)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = b \\ \frac{x-a}{(b-a)^2} \cdot \varepsilon & \text{dla } a \leq x < b \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq c \\ \frac{a-x}{(b-a)^2} \cdot \varepsilon & \text{dla } a \leq x < b \\ \frac{a-2b+c}{2(c-b)(b-a)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = b \\ \frac{c-x}{(c-b)^2} \cdot \varepsilon & \text{dla } b < x \leq c \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\varepsilon_c = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq b \text{ lub } x > c \\ \frac{1}{2(c-b)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = c \\ \frac{x-b}{(c-b)^2} \cdot \varepsilon & \text{dla } b < x < c \end{cases} \quad (5.32)$$

Analogiczne wzory można przedstawić dla funkcji trójkątnej opisanej wzorem (2.10).

Funkcja klasy s

Jest to kolejna funkcja wykorzystywana jako funkcja przynależności. Opisana jest za pomocą wzoru (2.11). Jak już wspomniano w punkcie 2.1.2, jest ona różniczkowalna w całej swej dziedzinie, gdy $c-b=b-a$. W przeciwnym przypadku występuje jeden punkt $x=b$, w którym pochodne lewo- i prawostronna są różne. Wtedy za wartość pochodnej proponuje się przyjąć ich średnią. Błąd propagowany na poszczególne wejścia wynosi

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq c \\ \frac{x-a}{(b-a)^2} \cdot \varepsilon & \text{dla } a \leq x < b \\ \frac{c-a}{2(b-a)(c-b)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = b \\ \frac{c-x}{(c-b)^2} \cdot \varepsilon & \text{dla } b < x \leq c \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\varepsilon_a = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq b \\ \frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^3} \cdot \varepsilon & \text{dla } a \leq x < b \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq c \\ \frac{(x-a)^2}{(a-b)^3} \cdot \varepsilon & \text{dla } a \leq x < b \\ \frac{a-c}{2(b-a)(c-b)} \cdot \varepsilon & \text{dla } x = b \\ \frac{(x-c)^2}{(b-c)^3} \cdot \varepsilon & \text{dla } b < x \leq c \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\varepsilon_c = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq b \text{ lub } x \geq c \\ \frac{(x-b)(x-c)}{(c-b)^3} \cdot \varepsilon & \text{dla } b < x < c \end{cases} \quad (5.36)$$

Funkcja klasy π

Element realizujący kolejną funkcję przynależności (2.12) propaguje błąd zgodnie z następującymi wzorami

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x = c \text{ lub } x \geq e \\ \frac{x-a}{(a-b)^2} & \text{dla } a < x < b \\ \frac{a-c}{2(a-b)(c-b)} & \text{dla } x = b \\ \frac{c-x}{(b-c)^2} & \text{dla } b < x < c \\ \frac{c-x}{(c-d)^2} & \text{dla } c < x < d \\ \frac{c-e}{2(c-d)(d-e)} & \text{dla } x = d \\ \frac{x-e}{(d-e)^2} & \text{dla } d < x < e \end{cases} \quad (5.37)$$

$$\varepsilon_a = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq b \\ \frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^3} & \text{dla } a \leq x \leq b \end{cases} \quad (5.38)$$

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \text{ lub } x \geq c \\ \frac{(x-a)^2}{(a-b)^3} & \text{dla } a \leq x < b \\ \frac{a-c}{2(a-b)(b-c)} & \text{dla } x = b \\ \frac{(x-c)^2}{(b-c)^3} & \text{dla } b < x \leq c \end{cases} \quad (5.39)$$

Funkcja klasy γ

Funkcja ta (2.13) ma dwa parametry a i b . Błąd propagowany na kolejne wejścia przez element realizujący tę funkcję wynosi

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x > b \\ \frac{1}{2(b-a)} & \text{dla } x = a \text{ lub } x = b \\ \frac{1}{b-a} & \text{dla } a < x < b \end{cases} \quad (5.40)$$

$$\varepsilon_a = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x > b \\ \frac{x-b}{2(b-a)^2} & \text{dla } x = a \text{ lub } x = b \\ \frac{x-b}{(b-a)^2} & \text{dla } a < x < b \end{cases} \quad (5.41)$$

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x > b \\ \frac{a-x}{2(b-a)^2} & \text{dla } x = a \text{ lub } x = b \\ \frac{a-x}{(b-a)^2} & \text{dla } a < x < b \end{cases} \quad (5.42)$$

Funkcja klasy L

Funkcja ta, określona wzorem (2.14) ma dwa parametry a i b . Błąd propagowany na kolejne wejścia przez element, który realizuje tę funkcję, wynosi

$$\varepsilon_x = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x > b \\ \frac{1}{2(a-b)} & \text{dla } x = a \text{ lub } x = b \\ \frac{1}{a-b} & \text{dla } a < x < b \end{cases} \quad (5.43)$$

$$\varepsilon_a = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x > b \\ \frac{b-x}{2(b-a)^2} & \text{dla } x = a \text{ lub } x = b \\ \frac{b-x}{(b-a)^2} & \text{dla } a < x < b \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x > b \\ \frac{x-a}{2(b-a)^2} & \text{dla } x = a \text{ lub } x = b \\ \frac{x-a}{(b-a)^2} & \text{dla } a < x < b \end{cases} \quad (5.45)$$

T-normy

Najczęściej stosowane *T-normy* to minimum (2.42) i iloczyn (2.43). Sposób propagacji błędu przez elementy realizujące te operacje został już przedstawiony.

Element realizujący *T-normę* przedstawioną za pomocą wzoru (2.44) możemy potraktować jak złożenie elementu maksimum i sumy. Dlatego błędy przekazywane na oba wejścia będą sobie równe, a ich postać zależy od przyjętego sposobu przekazywania błędu przez element realizujący funkcję maksimum. Jeśli jest to realizowane zgodnie ze wzorem (5.18), to

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon \quad (5.46)$$

Jeśli posłużymy się metodą opisaną przez wzór (5.19), wtedy

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \begin{cases} \varepsilon & \text{dla } a+b \geq 1 \\ 0 & \text{dla } a+b < 1 \end{cases} \quad (5.47)$$

W przypadku zastosowania metody (5.22), otrzymamy

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = (1+a+b-y) \cdot \varepsilon \quad (5.48)$$

Podobnie można postąpić dla pozostałych postaci T -normy.

S-normy

Najczęściej stosowana S -norma to maksimum (2.42). Sposób propagacji błędu przez element realizujący tę operację został już przedstawiony. Element realizujący S -normę wyrażoną wzorem (2.43) powinien przekazywać błąd zgodnie z zależnościami

$$\varepsilon_a = (1-b) \cdot \varepsilon \quad (5.49)$$

$$\varepsilon_b = (1-a) \cdot \varepsilon \quad (5.50)$$

S -normę przedstawioną za pomocą wzoru (2.44) możemy potraktować jako złożenie operacji minimum i dodawania. Sposób propagacji błędu będzie zatem zależał od sposobu przesyłania błędu przez element minimum. Jeśli jest to realizowane zgodnie z równością (5.18) wówczas

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon \quad (5.51)$$

Jeśli posłużymy się metodą opisaną przez wzór (5.19), to

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = \begin{cases} \varepsilon & \text{dla } a+b \leq 1 \\ 0 & \text{dla } a+b > 1 \end{cases} \quad (5.52)$$

W przypadku zastosowania metody (5.20), otrzymamy

$$\varepsilon_a = \varepsilon_b = (2+y-a-b) \cdot \varepsilon \quad (5.53)$$

Podobnie można postąpić dla pozostałych postaci S -normy.

Negacja

Element realizujący negację służy do uzyskania wartości funkcji przynależności dopełnienia zbioru rozmytego. Jego działanie opisane jest wzorem (2.57). Jest elementem o jednym wejściu. Błąd propagowany z wejścia wyraża się jako

$$\varepsilon_x = -\varepsilon \quad (5.54)$$

Relacja mniejszy lub równy

Element realizujący tę relację posiada dwa wejścia a i b oraz jedno wyjście. Wartość wyjściowa jest określona następująco

$$y = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } a \leq b \\ 0 & \text{jeżeli } a > b \end{cases} \quad (5.55)$$

Tak zdefiniowana funkcja nie jest różniczkowalna dla $a = b$, natomiast w pozostałych punktach przestrzeni wejściowej jej pochodna jest równa zero. Aby móc wykorzystać taki element w strukturach uczonych metodą gradientową, należy zastosować alternatywną metodę propagacji błędów. Jedną z nich polega na zastąpieniu wzoru (5.55) przez sigmoidę postaci

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\beta(b-a)}} \quad (5.56)$$

W takim przypadku błąd jest propagowany zgodnie z zależnościami

$$\varepsilon_a = -\beta \frac{e^{\beta(b-a)}}{(1 + e^{\beta(b-a)})^2} \varepsilon = -\beta \cdot y \cdot (1 - y) \cdot \varepsilon \quad (5.57)$$

$$\varepsilon_b = \beta \frac{e^{\beta(b-a)}}{(1 + e^{\beta(b-a)})^2} \varepsilon = \beta \cdot y \cdot (1 - y) \cdot \varepsilon \quad (5.58)$$

Jeżeli $\beta \rightarrow \infty$, to funkcja sigmoidalna (5.56) jest zbieżna do funkcji określonej wzorem (5.55).

W przypadku, gdy w nauczonej sieci ma być zastosowany element działający według zależności (5.55), to w trakcie uczenia możemy stosować element zastępczy z funkcją sigmoidalną (5.56), zwiększając wartość β w kolejnych iteracjach lub w miarę spadku wartości błędów.

5.3 Algorytmy genetyczne

Systemy rozmyto-neuronowe, jak już kilkakrotnie wspomniano, posiadają cechy zarówno systemów rozmytych jak i sieci neuronowych. Z uwagi na ten fakt, do problemu ustalenia parametrów struktury za pomocą algorytmu genetycznego można podejść w dwojaki sposób. Pierwszy z nich to generacja reguł, które są następnie implementowane w postaci struktury. W literaturze wymienia się dwie główne metody generacji reguł przy użyciu algorytmów genetycznych. W metodzie Pittsburgh [59] każdy genotyp zawiera zakodowaną informację o kompletnym systemie rozmytym, czyli o wszystkich jego regułach. W celu określenia funkcji przystosowania informacja zawarta w genotypie rozkodowuje się i konstruuje wybraną strukturę. Należy zauważyć, że genotyp nie zawiera informacji o rodzaju struktury, zatem możliwość zastosowania algorytmu genetycznego nie zależy od przyjętej struktury. Wybranie konkretnej struktury jest jednak nieodzowne przy wyznaczeniu funkcji przystosowania.

Strukturę o parametrach wynikających z rozkodowanego genotypu testuje się za pomocą każdego elementu ciągu uczącego $(\bar{x}_t, d_t)$, gdzie $t=1..T$, a T jest długością ciągu uczącego. Na podstawie wyników testów określa się wartość funkcji przystosowania zdefiniowanej np. jako

$$f = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T [y(\bar{x}_t) - d_t]^2 \quad (5.59)$$

gdzie $y(\bar{x}_t)$ jest odpowiedzią rozmytego systemu wnioskującego na wymuszenie za pomocą wektora wejściowego $\bar{x}_t$ pochodzącego z ciągu uczącego. Tak określona funkcja przystosowania jest nieujemna, o większej wartości dla osobników gorszych i mniejszej dla osobników lepszych. Jeśli chcemy zastosować metody selekcji promujące osobniki o większych wartościach funkcji przystosowania, to musimy odpowiednio ją zmodyfikować, co nie stanowi problemu.

Wartość funkcji przystosowania wyznacza się dla każdego genotypu w populacji, a następnie, na jej podstawie dokonuje się selekcji. Wybrane genotypy tworzą populację rodzicielską, którą poddaje się działaniu operatorów genetycznych (krzyżowania i mutacji), generując w ten sposób nową populację potomków.

W programie FLiNN-GA [38] zastosowano uproszczoną metodę Pittsburgh. Zakłada się, że w systemie występują reguły, których poprzedniki zawierają wszystkie możliwe kombinacje zdefiniowanych wartości wejściowych zmiennych lingwistycznych. W genotypie kodowane są więc tylko następniiki reguł. Położenie (*locus*) w chromosomach bitów opisujących dany następnik determinuje do której reguły on należy (z jakim poprzednikiem jest związany). W trakcie krzyżowania wymianie podlegają zatem jedynie fragmenty chromosomów związanych z regułami o identycznych poprzednikach z różnych systemów. Dzięki takiemu uproszczeniu istotnie zmniejszono długość chromosomów i jednocześnie zapewniono, że nie zdarzy się sytuacja dopuszczalna w przypadku klasycznej metody Pittsburgh, w której identyczne systemy rozmyte są opisane przez różne genotypy (te same reguły są zakodowane w różnej kolejności).

Alternatywą do metody Pittsburgh jest metoda Michigan [15]. Każdy genotyp w tej metodzie zawiera informację o pojedynczej regule. Dopiero grupa genotypów, a w szczególności cała populacja zawiera zakodowaną informację o systemie rozmytym. Ze względu na fakt, że krzyżowanie odbywa się między chromosomami zawierającymi informacje o parametrach pojedynczych reguł, funkcja przystosowania również jest tak

zdefiniowana, aby oceniała przydatność poszczególnych reguł. Wadą podstawowej wersji tego algorytmu jest możliwość poddania krzyżowaniu ze sobą wysoko ocenianych genotypów zawierających opis reguł o zupełnie odmiennych przesłankach, w wyniku czego otrzymujemy zwykle genotyp o niskiej jakości.

Interesujące połączenie metod Pittsburgh i Michigan, eliminujące jednocześnie ich niedoskonałości zostało przedstawione w pracy [60]. Genotyp zawiera tu zakodowaną informację o wszystkich regułach systemu rozmytego, jednak fragmenty dotyczące poszczególnych reguł nie są sklejone w jeden ciąg, lecz usytuowane w przestrzeni odpowiadającej przestrzeni wejściowej, na podstawie centrów zbiorów rozmytych opisanych w ich poprzednikach. Krzyżowaniu podlegają chromosomy opisujące poszczególne reguły leżące dostatecznie blisko siebie we wspomnianej przestrzeni. Systemy opisane przez genotypy mogą mieć różną ilość reguł, jedynie fragmenty odpowiadające poszczególnym regułom są zawsze tej samej długości.

Zauważmy, że działanie systemu rozmyto-neuronowego o wybranej strukturze i określonej ilości reguł zależy tylko i wyłącznie od wartości parametrów (wymienionych na początku rozdziału 5). W takim przypadku najprostszą drogą do zastosowania algorytmu genetycznego jest zakodowanie w chromosomie wszystkich parametrów, które mają podlegać doborowi. O ile poprzednie podejścia były ściśle związane z faktem, że opisywane w niniejszej pracy struktury są systemami rozmytymi, o tyle to rozwiązanie jest od faktu tego niezależne i można je stosować w niemal nieograniczonym zakresie. W programie FLiNN-GA zaimplementowano również i tę możliwość. Może ona być użyta równolegle z uproszczoną metodą Pittsburgh do ustalenia parametrów funkcji przynależności zbiorów rozmytych w poprzednikach i następnikach reguł lub do ustalenia dowolnej grupy parametrów dowolnej struktury.

5.4 Grupowanie danych

Przydatne przy ustalaniu reguł dla systemu rozmytego jest wykorzystanie algorytmu grupowania danych (klasteryzacji). Do przeprowadzenia tego procesu potrzebny jest zbiór danych wzorcowych w postaci par $(\bar{x}_i, d_i)$, a więc takich jakie są używane jako ciąg uczący w metodach gradientowych. Metoda polega na wydzieleniu w przestrzeni rozważań X obszarów, zawierających elementy zbioru danych o zbliżonych wartościach d . Obszar taki tworzy klasę, która może składać się z wielu podobszarów zwanych klastrami. Klaster jest reprezentowany przez wektor prototypowy v . Dla każdego punktu przestrzeni X jest

określony stopień przynależności do danego klastra. W przypadku problemów klasyfikacji, gdzie poszczególne wzorce należą do określonych klas wyrażonych wartościami d , klasę budują się dla tych elementów zbioru danych, których wartości d są sobie równe.

Metody znajdowania klas (klastrow) są stale rozwijane. Jako podstawowe należy wymienić prace [4] i [5]. Obecnie można znaleźć opisy bardziej zaawansowanych metod, np. dwuetapowy algorytm klasteryzujący [56] umożliwiający automatyczny dobór zarówno ilości klastrow, jak i ich parametrów.

Otrzymane dane o klastrach można bardzo łatwo przenieść na parametry systemu rozmytego, a w szczególności rozmyto-neuronowego. Każda klasa jest reprezentowana przez jeden zbiór rozmyty A^k . Jeśli składa się on z wielu klastrow można zastosować strukturę zmodyfikowaną opisaną w punkcie 4.2 gdzie l -temu klastrowi k -tej klasy odpowiada zbiór rozmyty $A^{k,l}$, a zbiór rozmyty A^k opisany jest wzorem (4.15). Druga możliwość to zrealizowanie każdego klastra przez odpowiedni zbiór A^k . Parametry zbiorów B^k określa się na podstawie wartości d . W przypadku problemów klasyfikacji rozwiązywanych przez systemy rozmyto-neuronowe opisane w punktach 3.2 i 3.3 można przyjąć, że

$$\bar{y}^k = d^k \quad (5.60)$$

gdzie d^k jest wartością d dla tych elementów zbioru wzorcowego, dla których zbudowano klasę bądź klaster zrealizowany przez zbiór rozmyty A^k . Przykłady wykorzystania klasteryzacji do wyznaczenia parametrów systemów rozmyto-neuronowych można znaleźć m.in. w pracach [8], [57] i [58].

6 ANALIZA DZIAŁANIA SYSTEMÓW W WYBRANYCH SYTUACJACH

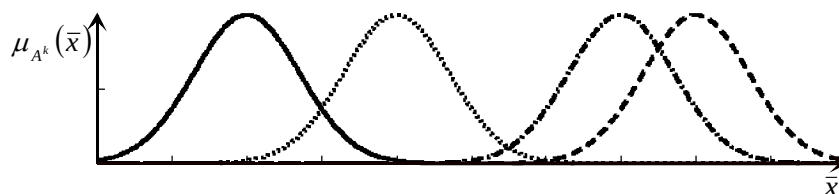
W rozdziale tym zostanie przedstawiona analiza systemów rozmyto-neuronowych opisanych w rozdziale 3.

6.1 Przypadek ogólny

Zamieszczone poniżej wykresy pokazują jak zmieniają się wartości $\mu_B(\bar{y}^k)$ wraz ze zmianą wartości wejściowej $\bar{x}$. Sygnały $\mu_B(\bar{y}^k)$ są generowane przez elementy realizujące agregację (S-normy dla konstruktywnych modeli lingwistycznych lub T-normy dla modeli destrukcyjnych). Są one przekazywane do warstw (identycznie dla wszystkich przedstawionych struktur) zawierających wagi $\bar{y}^k$ i odpowiedzialnych za operację wyostrzania. Przebieg tych sygnałów w funkcji zmieniających się wartości wyjściowych charakteryzuje właściwości struktur.

Kolejne wykresy, wykonane zostały dla różnych systemów rozmyto-neuronowych przedstawionych w rozdziale 3, wykorzystujących dokładnie tę samą bazę reguł. Identyczne były również parametry funkcji przynależności zbiorów rozmytych. Dla przejrzystości rysunków, analizowane struktury mają jedno wejście i realizują cztery reguły. Zdefiniowane są zatem cztery zbiory rozmyte A^k . Zbiory rozmyte B^k wykorzystywane w następnikach reguł nie mają znaczenia w tych rozważaniach.

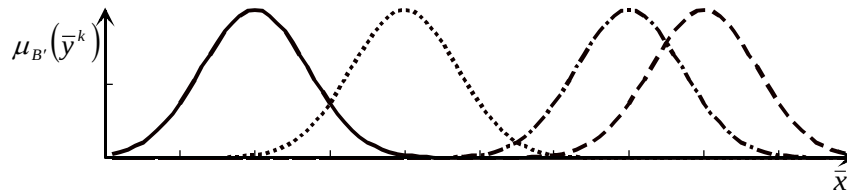
Wykresy sygnałów (rys. 6.1) otrzymywanych na wyjściach warstwy realizującej funkcje przynależności zbiorów rozmytych wykorzystanych w poprzednikach reguł pokrywają się z wykresami funkcji przynależności tych zbiorów.



Rys. 6.1. Wykresy sygnałów otrzymywanych na wyjściach warstwy realizującej zbiory rozmyte wykorzystane w poprzednikach reguł.

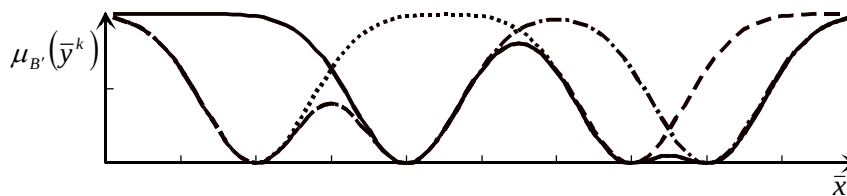
Struktura systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem według reguły Mamdaniego lub Larsena (rys. 3.2) nie zawiera żadnych elementów pomiędzy warstwą realizującą funkcje przynależności zbiorów rozmytych A^k , a warstwą zawierającą parametry $\bar{y}^k$. Z tego powodu

wykresy z rysunku 6.2 pokrywają się z wykresami z rysunku 6.1. Sygnały przesyłane przez elementy realizujące poszczególne reguły są od siebie całkowicie niezależne.



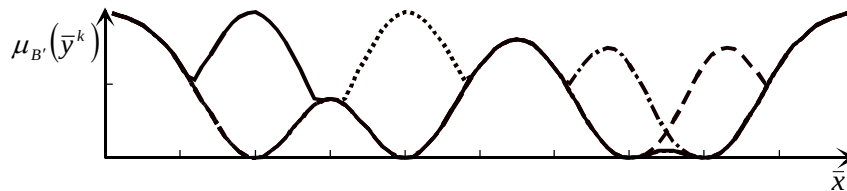
Rys. 6.2. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego lub Larsena.

Na rysunku 6.3 widać wyraźnie interakcję pomiędzy poszczególnymi regułami. Ze wzoru (3.35) wynika, że wartość $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ nie zależy od wartości sygnału $\mu_{A^k}(\bar{x})$, a wyłącznie od tych $\mu_{A^j}(\bar{x})$, dla których $j \neq k$.



Rys. 6.3. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza lub probabilistycznej.

W działaniu systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem według reguły Zadeha, (rys. 6.4) widać pewne cechy zarówno systemu z wnioskowaniem Larsena, jak i systemu z wnioskowaniem binarnym.



Rys. 6.4. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Zadeha lub Willmotta.

Istotnie, w zakresie zmienności $\bar{x}$, w którym $\mu_{A^k}(\bar{x}) > 0,5$, na k -ty element realizujący agregację (T -normę) podawane są zarówno sygnały takie jak w systemie z wnioskowaniem Larsena, jak i w systemie z wnioskowaniem binarnym. W pozostałym zakresie zmienności $\bar{x}$, czyli gdy $\mu_{A^k}(\bar{x}) < 0,5$, na k -ty element realizujący agregację podawane są negacje wszystkich sygnałów $\mu_{A^j}(\bar{x})$. W szczególności, gdy sytuacja ta zachodzi dla wszystkich N reguł, na wszystkie elementy realizujące agregację podawane są dokładnie te same wartości, czyli negacje sygnałów $\mu_{A^j}(\bar{x})$. Zatem także wartości $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ na wyjściach tych elementów będą sobie równe. Na rysunku 6.4 są to fragmenty, w których wszystkie cztery wykresy

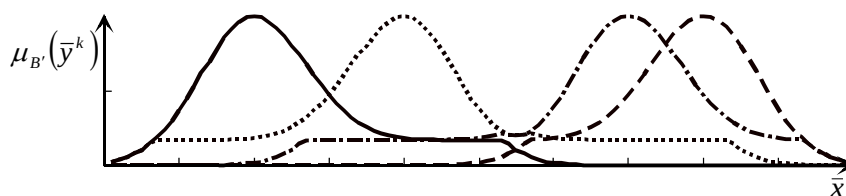
pokrywają się. Ze wzoru (3.4) określającego stosowaną operację wyostrażania wynika, że jeśli wartości $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ są równe dla $k=1\dots N$, to wartość $\bar{y}$ uzyskana na wyjściu nie będzie zależała od $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ i wyniesie

$$\bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \bar{y}^k}{N} \quad (6.1)$$

Wartość tę możemy traktować jako neutralną odpowiedź systemu wnioskującego. Pojawienie się jej już przy $\mu_{A^k}(\bar{x}) < 0,5$ jest właściwością charakterystyczną wyłącznie dla systemu z wnioskowaniem według reguły Zadeha lub Willmotta. W literaturze (m.in. [13], [17] i [16]) spotyka się mechanizm odrzucania wniosków otrzymanych z systemu wnioskującego. Decyzja o odrzuceniu podejmowana jest na podstawie poziomu aktywności reguł biorących udział we wnioskowaniu. Zjawisko podawania odpowiedzi neutralnej przez system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem Zadeha lub Willmotta można traktować jako odrzucenie wniosku. Zachowanie to wynika jednak bezpośrednio ze struktury systemu i następuje przy niezmiennym progu równym $\frac{1}{2}$.

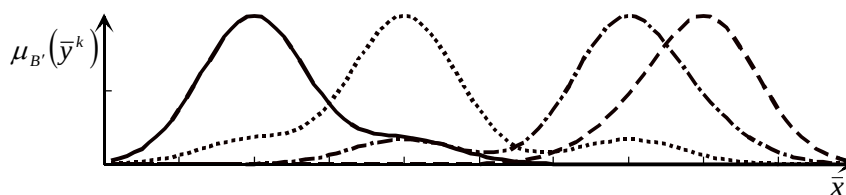
W systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy, przy zbiorach rozmytych A^k ułożonych jak przedstawia rysunek 6.1, na warstwy wyostrażające zawsze przekazywane są wartości bardzo bliskie zeru. Aby tak się nie działo, musiałyby istnieć takie punkty w przestrzeni $\mathbf{X}$, które w znaczącym stopniu należałyby co najmniej do $N-1$ zbiorów rozmytych A^k . Przypadek taki, dla $N=3$ jest przedstawiony na rysunkach 2.43 i 2.44. Konstruowanie takich, tzn. z niemal pokrywającymi się zbiorami A^k , systemów dla większej ilości reguł wydaje się bezcelowe. Co więcej, analizując rysunki 2.43 i 2.44 należy zauważyć, że zbiór wynikowy B' najbliższy jest następnikowi reguły, dla której poziom aktywacji był najniższy.

O ile w przypadku podstawowej struktury z wnioskowaniem według reguły Mamdaniego stopień przynależności wartości wejściowej $\bar{x}$ do zbioru rozmytego A^k określał wartość $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ zgodnie ze wzorem (3.12), to w tym przypadku ma na nią wpływ także stopień przynależności $\bar{x}$ do pozostałych zbiorów A^j ; jednak tylko tych, dla których $\mu_{B_j}(\bar{y}^k) > 0$. Tę zależność $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ od parametrów zbioru rozmytego B^k wyraża we wzorze (3.114) współczynnik $p_{j,k}$ określony przez (3.109). Rysunek 6.5 przedstawia przykładowe wykresy dla pewnych konkretnych zbiorów B^k .



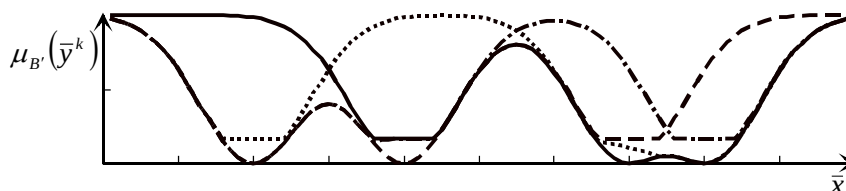
Rys. 6.5. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego.

Właściwości rozszerzonej struktury rozmyto-neuronowej z wnioskowaniem według Larsena są zbliżone do struktury z wnioskowaniem Mamdaniego. Zastąpienie operatora minimum przez iloczyn dało gładkie charakterystyki (rys. 6.6) i brak przedziałów, w których zmiany $\bar{x}$ nie dawały zmian jednego z $\mu_{B^k}(\bar{y}^k)$.

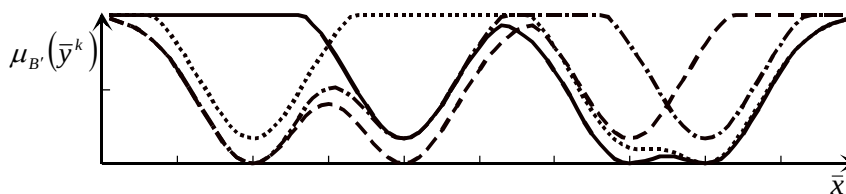


Rys. 6.6. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Larsena.

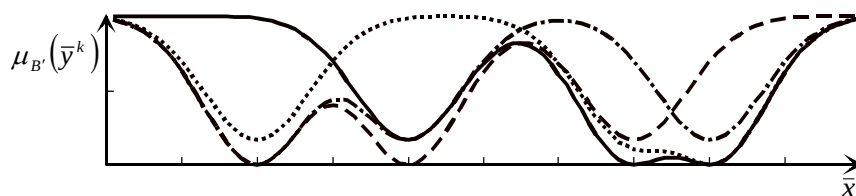
Zmiany, które widać na rysunkach 6.7, 6.8 i 6.9, w stosunku do rysunku 6.3 nie są wielkie. Te, które są widoczne, będą się pogłębiały w miarę zbliżania się do siebie zbiorów rozmytych B^k , co wyraża się wzrostem wartości współczynnika $p_{j,k}$ (3.109) we wzorach (3.124), (3.130) i (3.142).



Rys. 6.7. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły binarnej.

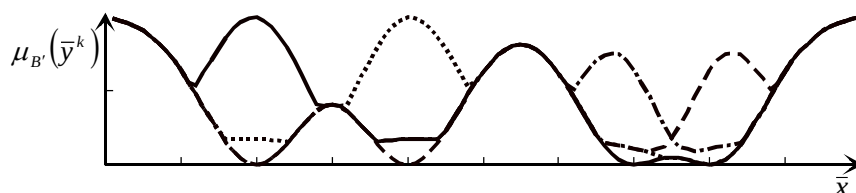


Rys. 6.8. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Łukasiewicza.



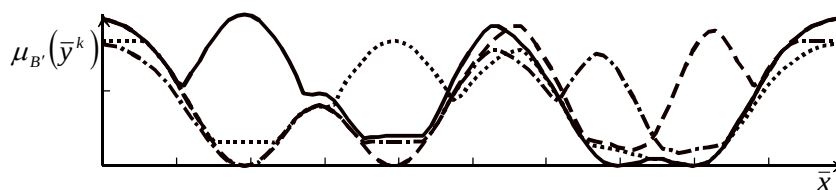
Rys. 6.9. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły probabilistycznej.

Podobnie jak w przypadku systemów z wnioskowaniem binarnym, Łukasiewicza i probabilistycznym, tak też w przypadku reguły Zadeha różnice między wykresami otrzymanymi dla struktury podstawowej (rys. 6.4) i rozszerzonej (rys. 6.10) są niewielkie, choć będą się pogłębiały, jeśli następniki reguł będą do siebie coraz bardziej zbliżone. Również dla systemu rozszerzonego z wnioskowaniem Zadeha widoczne są fragmenty, w których wartości $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ są sobie równe dla $k=1 \dots N$, charakterystyczne dla tego typu wnioskowania.



Rys. 6.10. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Zadeha.

Porównując wykresy przedstawione na rysunku 6.11 z rysunkiem 6.10, widać, że przebiegi są podobne, jednak system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem Willmotta nie posiada charakterystycznej dla systemu z wnioskowaniem Zadeha właściwości – wykresy $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ dla poszczególnych $k=1 \dots N$ nie pokrywają się.



Rys. 6.11. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Willmotta.

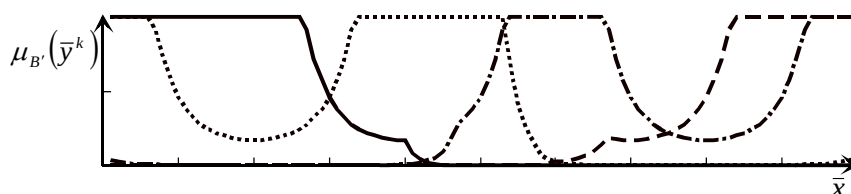
Wartości $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$, które można odczytać z rysunku 6.12 (reguła ograniczonej sumy) są niewielkie. Zauważmy jednak, że we wzorze (3.4) określającym stosowaną metodę wyostrzania istotne są stosunki między $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ dla poszczególnych k , a nie ich wartość. Nawet przy tak małych ich poziomach wyostrzanie będzie przebiegać poprawnie. Ważny jest jednak inny aspekt otrzymanych wyników. Dla danej wartości $\bar{x}$, największą wartość $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ uzyskujemy dla tej reguły k , dla której stopień przynależności $\bar{x}$ do A^k jest najmniejszy. Uzyskany rezultat jest zatem dokładnie przeciwny w stosunku do informacji

zawartych w zbiorze reguł. Aby wyniki były zgodne z oczekiwaniami, należałoby wprowadzić zaprzeczenia do bazy reguł, co jednak sprowadziłoby system do systemu z wnioskowaniem Łukasiewicza.

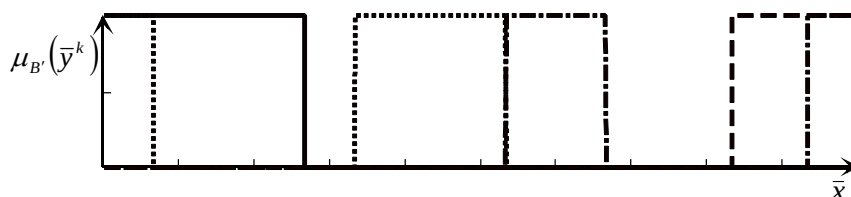


Rys. 6.12. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyodrębniającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy.

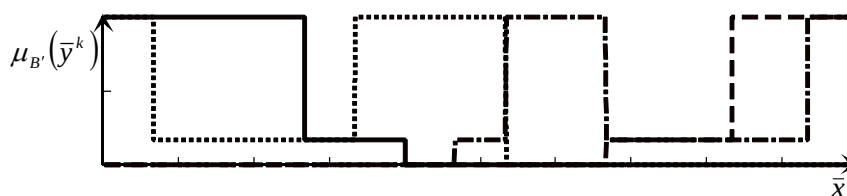
W rozważaniach pominięto system podstawowy z wnioskowaniem Goguena, Sharpa, Gödela lub Yagera ponieważ, jak wspomniano w punkcie 3.4.9 stosowanie tego systemu z gaussowskimi zbiorami rozmytymi jest bezcelowe. Dla rozszerzonych systemów z tymi metodami wnioskowania odpowiednie wykresy pokazano na rysunkach 6.13, 6.14, 6.15 i 6.16. Widać na nich, że w systemie z wnioskowaniem Sharpa $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ przyjmuje tylko dwie wartości 0 lub 1. Wiąże się to z bardzo niekorzystną cechą. Istnieją punkty w przestrzeni $\mathbf{X}$, dla których wartość $\mu_{B'}(\bar{y}^k) = 0$ dla każdego $k = 1 \dots N$. W sytuacji takiej we wzorze (3.4) opisującym wyodrębnianie występuje dzielenie przez zero i wartość wynikowa nie może być określona. Wykresy dla systemu z wnioskowaniem Gödela mają bardzo podobny kształt, są równie strome, nie posiadają jednak tej niekorzystnej cechy.



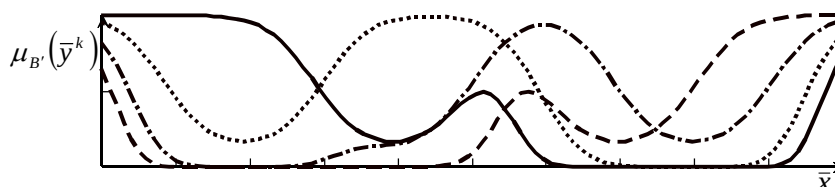
Rys. 6.13. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyodrębniającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Goguena.



Rys. 6.14. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyodrębniającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Sharpa.



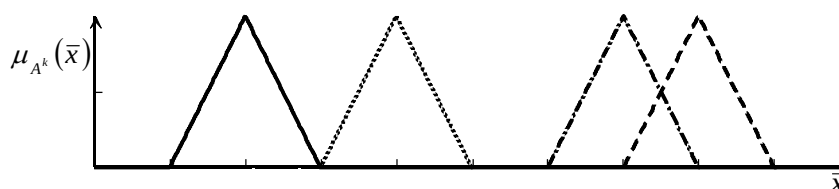
Rys. 6.15. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Gödela.



Rys. 6.16. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Yagera.

6.2 Przypadek punktów z zerową przynależnością

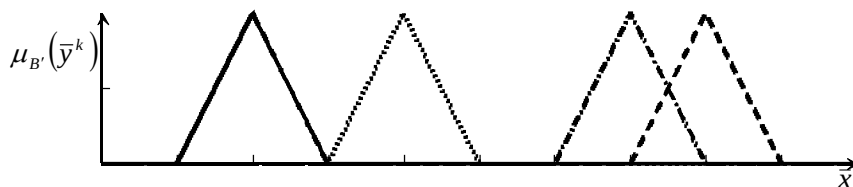
Jeśli każdy punkt przestrzeni wejściowej X należy w niezerowym stopniu do co najmniej jednego zbioru rozmytego A^k znaczy to, że system rozmyty posiada zbiór reguł opisujący wszystkie możliwe przypadki informacji wejściowych. W przypadku takim poziom aktywacji co najmniej jednej reguły jest niezerowy i można określić odpowiedź systemu. W niniejszym punkcie pracy rozważany będzie przypadek, gdy liczba reguł, a także zbiorów rozmytych A^k jest ograniczona, a przestrzeń wejściowa zawiera obszary, których punkty nie należą do żadnego ze zdefiniowanych zbiorów A^k . Rysunek 6.17 przedstawia przykładowe wartości sygnałów na wyjściach warstwy realizującej zbiory rozmyte w takim przypadku.



Rys. 6.17. Wykresy sygnałów otrzymywanych na wyjściach warstwy realizującej zbiory rozmyte wykorzystane w poprzednikach reguł.

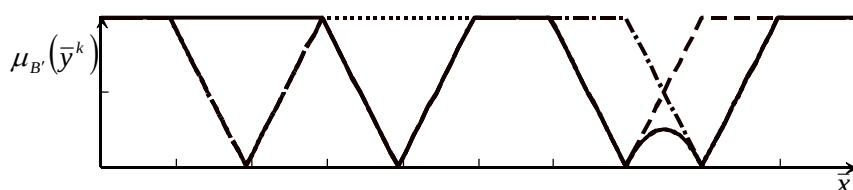
Wartości te odpowiadają poziomom aktywacji poszczególnych reguł. Widać obszary, w których żadna reguła nie jest aktywowana.

W sytuacji, gdy żadna reguła nie jest aktywna system rozmyto-neuronowy przedstawiony w punkcie 3.2 (wykres na rys. 6.18) nie może działać poprawnie. W mianowniku wzorów (3.13) i (3.20) opisujących go występuje wówczas wartość zero i stan wyjściowy jest nieokreślony.

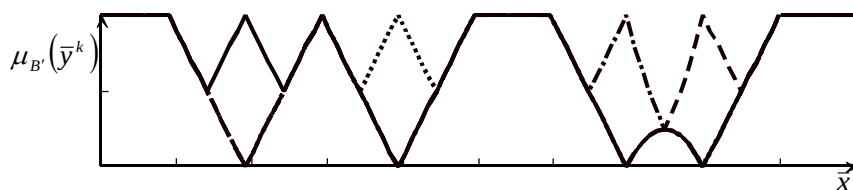


Rys. 6.18. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego lub Larsena.

Problem ten nie występuje w przypadku systemów rozmyto-neuronowych z wnioskowaniem binarnym, Łukasiewicza, probabilistycznym (rys. 6.19), Zadeha i Willmotta. (rys. 6.20) Gdy poziom aktywacji wszystkich reguł jest równy zeru, w systemach tych wartość $\mu_{B'}(\bar{y}^k)$ dla wszystkich reguł jest równa 1, a na wyjściu systemu pojawia się wartość opisana wzorem (6.1).

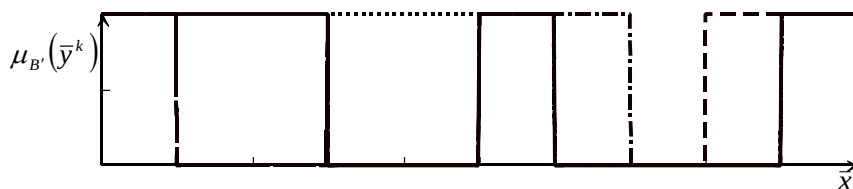


Rys. 6.19. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza lub probabilistycznej.



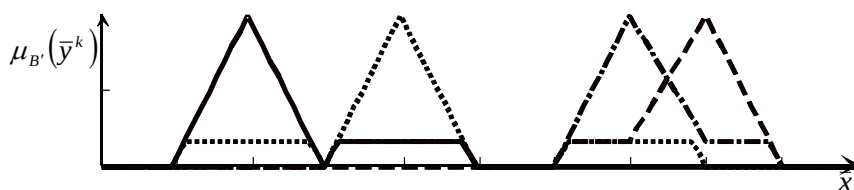
Rys. 6.20. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Zadeha lub Willmotta.

W podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem Goguena, Sharpa, Gödela lub Yagera istnieje taki obszar wartości $\bar{x}$ dla których $\mu_{B'}(\bar{y}^k) = 0$ dla wszystkich reguł (rys. 6.21). Co istotne, punkty należące do niego należą do więcej niż jednego zbioru A^k . Zjawisko to jest także widoczne na rysunku 6.14 dla rozszerzonego systemu z wnioskowaniem Sharpa i zbiorów A^k o gaussowskich funkcjach przynależności.

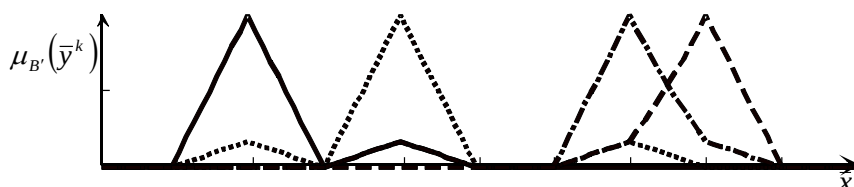


Rys. 6.21. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w podstawowym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Goguena, Sharpa, Gödela lub Yagera.

Rozszerzone systemy rozmyto-neuronowe z wnioskowaniem Mamdaniego (rys. 6.22) i Larsena (rys. 6.23) mają tę samą cechę co odpowiednie systemu podstawowe (p. 3.2). Nie działają poprawnie, gdy żadna reguła nie jest aktywna.

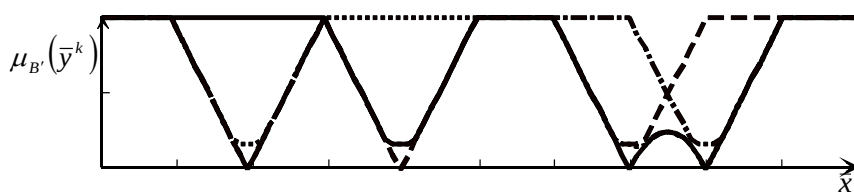


Rys. 6.22. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego.

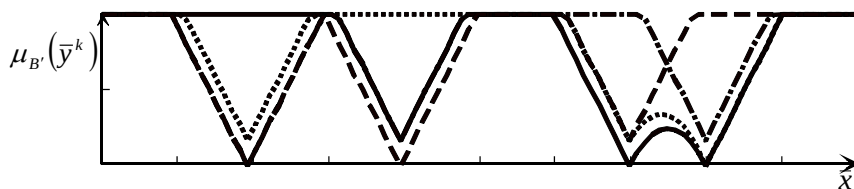


Rys. 6.23. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Larsena.

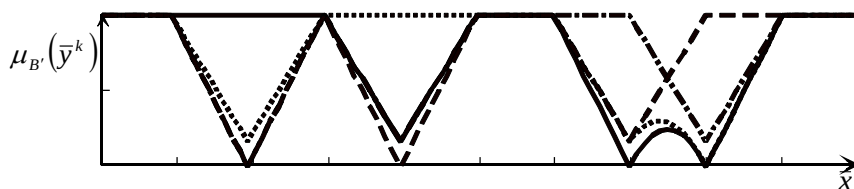
Rozszerzone systemy rozmyto-neuronowe z wnioskowaniem binarnym (rys. 6.24), Łukasiewicza (rys. 6.25), probabilistycznym (rys. 6.26) i Zadeha (rys. 6.27), w sytuacji, gdy żadna reguła nie jest aktywna, zachowują się poprawnie zwracając wartość określoną wzorem (6.1).



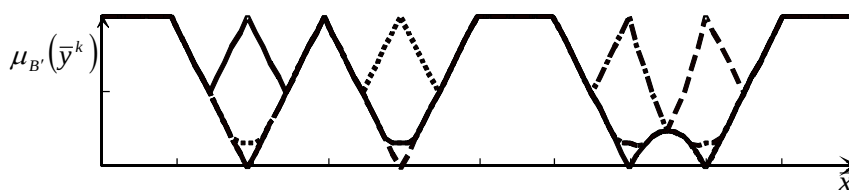
Rys. 6.24. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły binarnej.



Rys. 6.25. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Łukasiewicza.

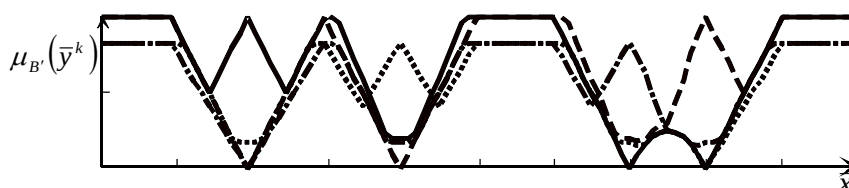


Rys. 6.26. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły probabilistycznej.



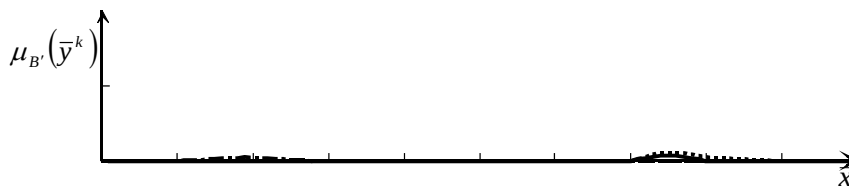
Rys. 6.27. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Zadeha.

Rozszerzony system rozmyto-neuronowe z wnioskowaniem Willmotta (rys. 6.28) nie posiada tej cechy. Odpowiedź systemu będzie zawsze określona, ale jej wartość będzie różna od wynikającej ze wzoru (6.1)



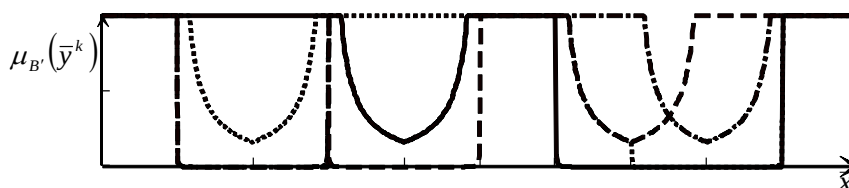
Rys. 6.28. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Willmotta.

Wykresy uzyskane dla systemu rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy (rys. 6.29) pokazują, że sygnały podawane na warstwy wyostrzające mają znikome wartości, a ponadto niezgodne z oczekiwaniami.

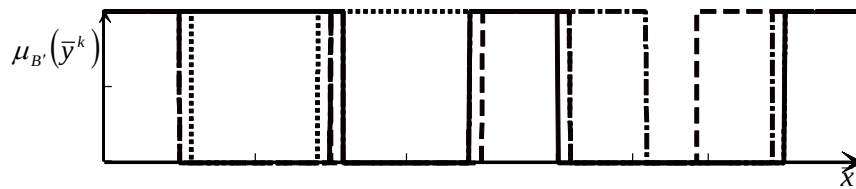


Rys. 6.29. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy.

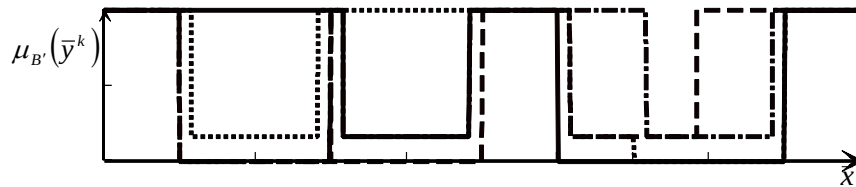
Rozszerzone systemu rozmyto-neuronowe z wnioskowaniem Goguena (rys. 6.30), Gödela (rys. 6.32) i Yagera (rys. 6.33) również zachowują się poprawnie i w przypadku, gdy żadna reguła nie jest aktywna ich odpowiedź jest określona przez (6.1). Wartość tę można uznać za odpowiedź domyślną tych systemów. System rozszerzony z wnioskowaniem Sharpa (rys. 6.31) w sytuacji tej zachowuje się podobnie, jednak posiada tę samą niekorzystną cechę co system podstawowy. Istnieją wartości $\bar{x}$, dla których $\mu_{B'}(\bar{y}^k) = 0$ dla wszystkich $k = 1 \dots N$, co uniemożliwia przeprowadzenie operacji wyostrzania zgodnie ze wzorem (3.4).



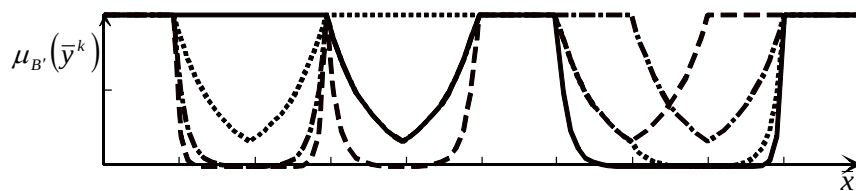
Rys. 6.30. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwy wyostrzające w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Goguena.



Rys. 6.31. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Sharpa.



Rys. 6.32. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Gödela.



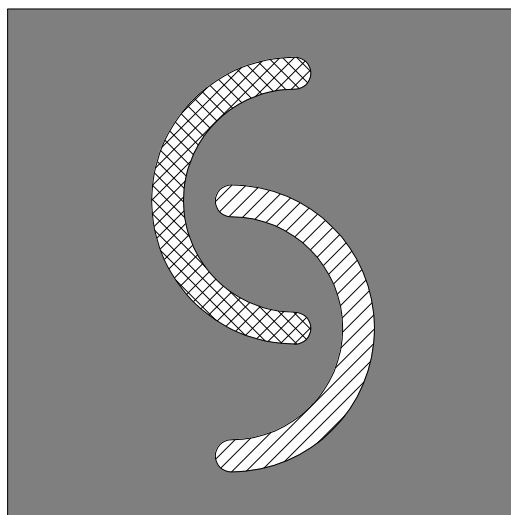
Rys. 6.33. Wykres sygnałów przekazywanych na warstwę wyostrzającą w rozszerzonym systemie rozmyto-neuronowym z wnioskowaniem wg reguły Yagera.

7 BADANIA EKSPERYMENTALNE

W rozdziale tym zostanie zilustrowane działanie systemów rozmyto-neuronowych, przedstawionych w rozdziale 3, w pewnych przypadkach potencjalnych zastosowań. W badaniach wykorzystano program FLiNN [45], [38].

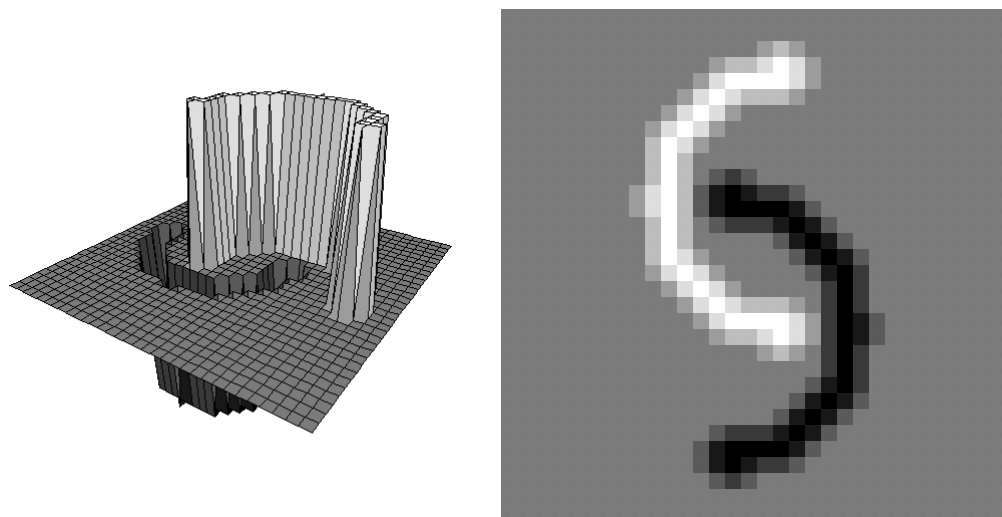
7.1 Zadanie klasyfikacji

Celem porównania właściwości systemów rozmyto-neuronowych realizowanych według poszczególnych reguł zastosowano je do klasyfikacji punktów w przestrzeni dwuwymiarowej do dwóch klas. Na rysunku 7.1 przedstawiono przestrzeń rozważań oraz usytuowanie w niej wspomnianych klas. Zadaniem systemu rozmytego jest określenie przynależności punktu do jednej z klas na podstawie jego współrzędnych podanych na wejście struktury. Jeśli punkt nie należy do żadnej z klas, powinno to również wynikać z odpowiedzi systemu. Problem ten był już przedstawiony w artykułach [39] i [55].



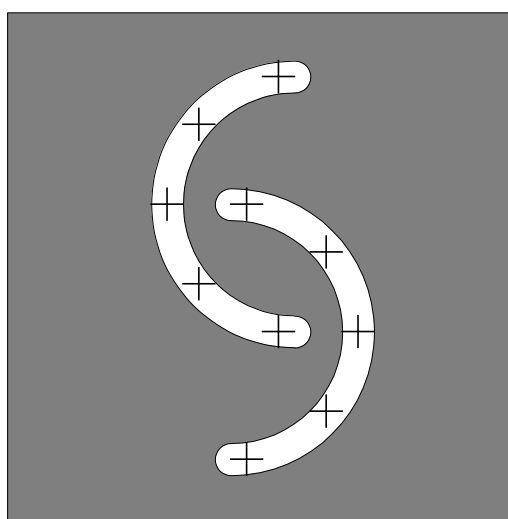
Rys. 7.1. Położenie klas w dwuwymiarowej przestrzeni X .

Założono, że odpowiedź systemu równa 1 przynależność punktu do jednej z klas, natomiast -1 oznacza przynależność do drugiej klasy, wartość 0 – dla punktów które nie należą do żadnej z klas. W celu stworzenia ciągu uczącego wybrano 1089 równomiernie rozłożonych punktów w przestrzeni X i przydzielono im jedną z trzech wymienionych wartości. Punkty te tworzą siatkę przedstawioną na rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Siatka tworzona przez ciąg uczący.

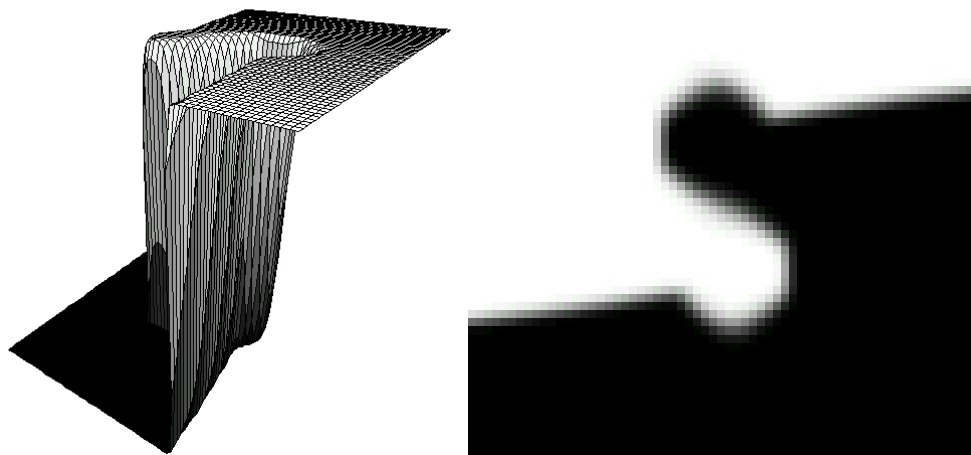
Przed rozpoczęciem uczenia określono 10 reguł. W następnikach pięciu z nich wyszczególniono pierwszą z klas (zbiory rozmyte o środku w punkcie 1), w pozostałych drugą klasę (zbiory rozmyte o środku w punkcie -1). W poprzednikach poszczególnych reguł wykorzystano zbiory rozmyte o środkach w punktach oznaczonych na rysunku 7.3. Wartości określające zbiory rozmyte zastosowane w regułach stanowiły wartości początkowe parametrów struktur.



Rys. 7.3. Położenie centrów zbiorów rozmytych wykorzystanych w poprzednikach reguł.

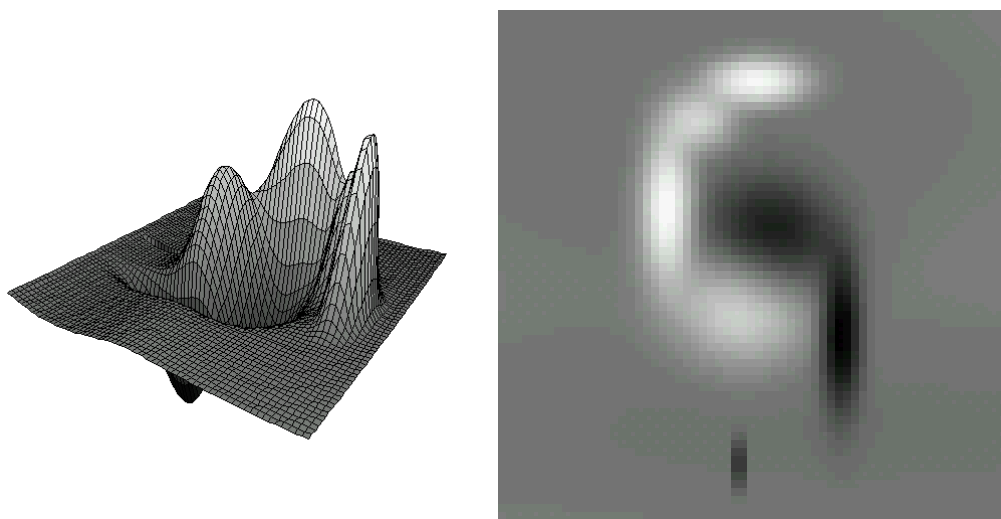
Każdą ze struktur douczono metodą wstecznej propagacji błędów opisaną w punkcie 5.2, startując od wartości parametrów wynikających z określonych wyżej reguł. Poza zaznaczonymi przypadkami uczeniu nie podlegały parametry $\bar{y}^k$. Następnie przetestowano je dla 4225 równomiernie rozłożonych punktów, uzyskując siatki przedstawione na rysunkach 7.4÷7.21.

Struktura rozmyto-neuronowa z wnioskowaniem według reguły Mamdaniego lub Larsena klasyfikuje poprawnie punkty należące do zdefiniowanych w regułach klas. Punkty nie należące do żadnej z klas, system ten klasyfikuje do klasy najbliższej (rys. 7.4).



Rys. 7.4. Siatka uzyskana w trakcie testowania podstawowego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego lub Larsena.

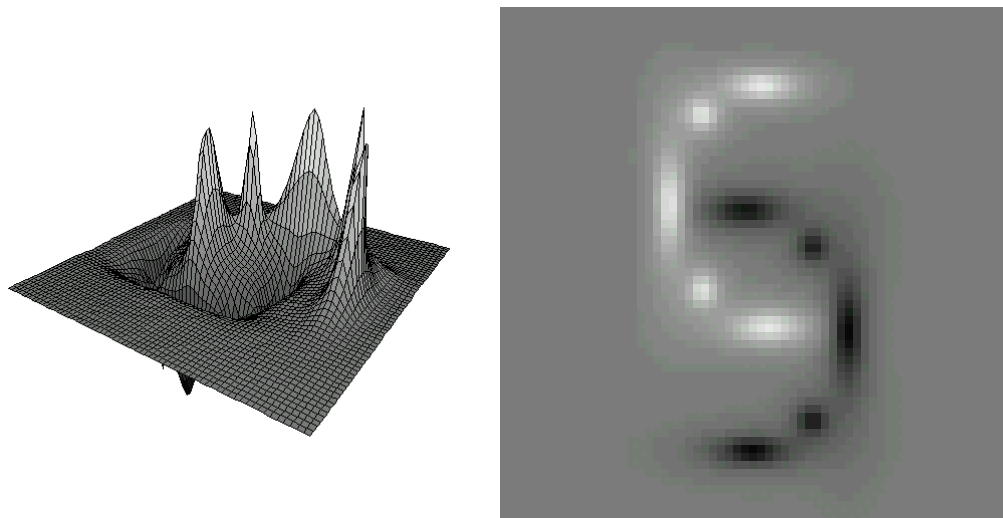
Dopiero uczenie, w którym doborowi poddane zostały także parametry $\bar{y}^k$, spowodowało poprawne rozpoznawanie punktów nie należących do żadnej z klas. Rezultat ten przedstawia rysunek 7.5. W wyniku tego uczenia część reguł została przekwalifikowana do rozpoznawania tych właśnie punktów z widoczną szkodą dla punktów rozpoznawanych poprzednio.



Rys. 7.5. Siatka uzyskana w trakcie testowania podstawowego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego lub Larsena po zmianie następników.

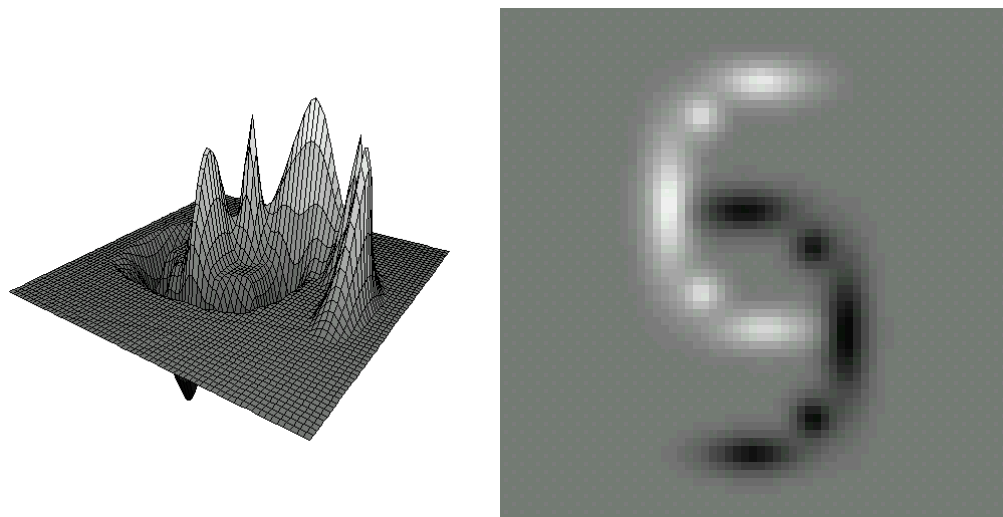
W trakcie uczenia systemu z wnioskowaniem według reguł binarnej, Łukasiewicza lub probabilistycznej wartość $\bar{y}^k$ pozostawała niezmienna, czyli nie zmieniało się również przeznaczenie reguł. Pomimo to, system identyfikuje poprawnie zarówno punkty należące do

zdefiniowanych klas, jak i pozostałe (rys. 7.6). Ze względu na ograniczoną stromość zbiorów rozmytych punkty leżące w pobliżu granic klas są klasyfikowane wartościami z przedziału $[-1, 1]$.



Rys. 7.6. Siatka uzyskana w trakcie testowania podstawowego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza lub probabilistycznej.

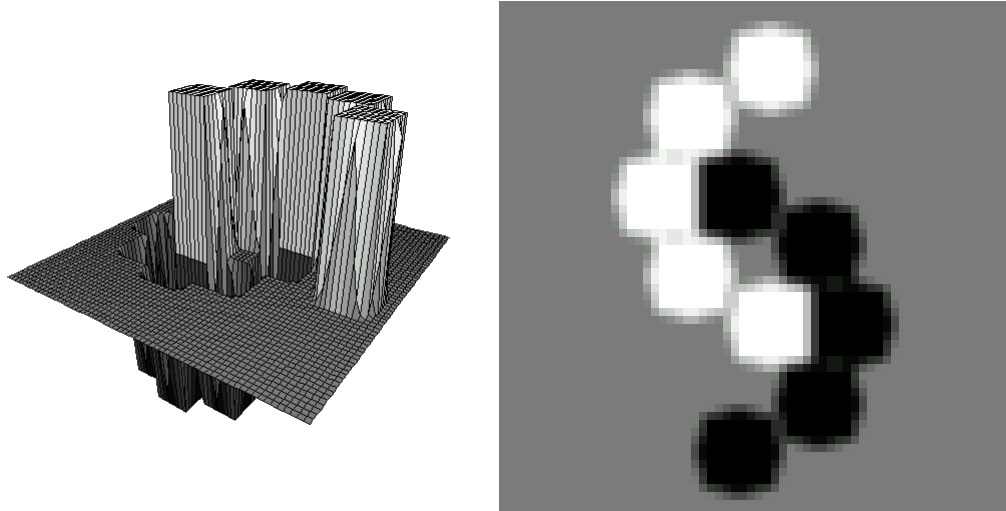
Jak widać z rysunku 7.6 i 7.7, efekty uzyskiwane przez systemy z wnioskowaniem według reguł binarnej, Łukasiewicza lub probabilistycznej są bardzo podobne do uzyskania przez systemy z wnioskowaniem według reguły Zadeha i Willmotta.



Rys. 7.7. Siatka uzyskana w trakcie testowania podstawowego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha lub Willmotta.

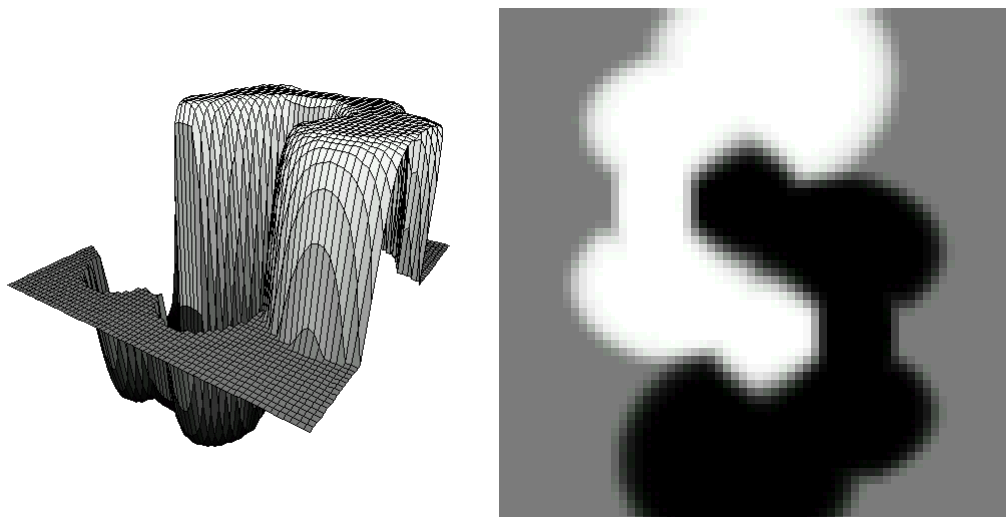
W punkcie 3.4.9 stwierdzono, że systemy rozmyto-neuronowe uwzględniające założenie (3.6) z wnioskowaniem według reguły Goguena, Sharpa, Gödela i Yagera i zbiorami rozmytymi typu Gaussa nie mogą działać poprawnie. Z tego powodu w systemach tych zastosowano zbiory o trójkątnej funkcji przynależności.

Podstawowy system z tym typem wnioskowania daje najostrzejsze granice między poszczególnymi klasami. Ze względu na przyjęcie bardzo ostrego kryterium, o kształcie klastrów decyduje kształt podstawy zbiorów rozmytych. W przypadku z rysunku 7.8 są to prostokąty.

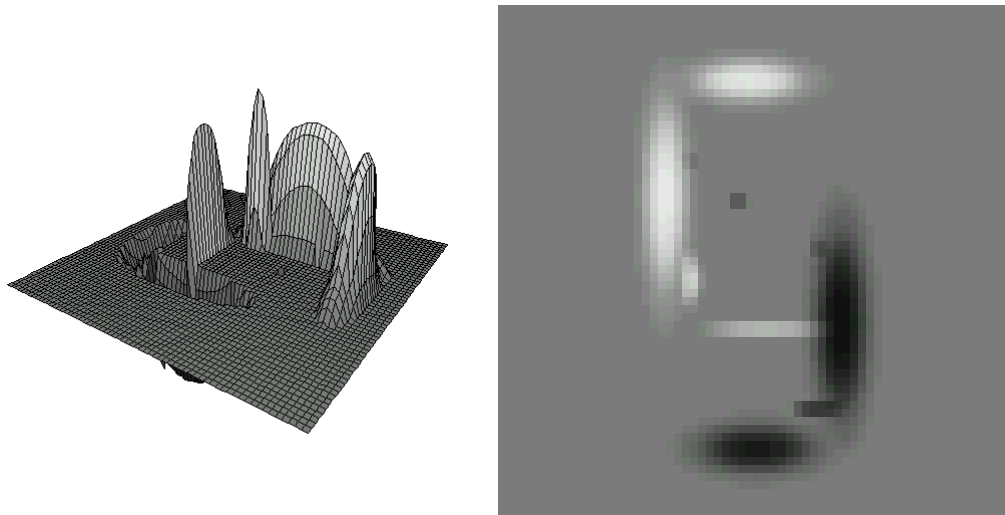


Rys. 7.8. Siatka uzyskana w trakcie testowania podstawowego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Goguena, Sharpa, Gödela lub Yagera.

Pomimo długotrwałego uczenia wyniki uzyskane dla systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem według reguły Mamdaniego są niezadowalające zarówno w przypadku, gdy $\bar{y}^k$ pozostawały niezmiennie (rys. 7.9) jak i gdy podlegały uczeniu (rys. 7.10).

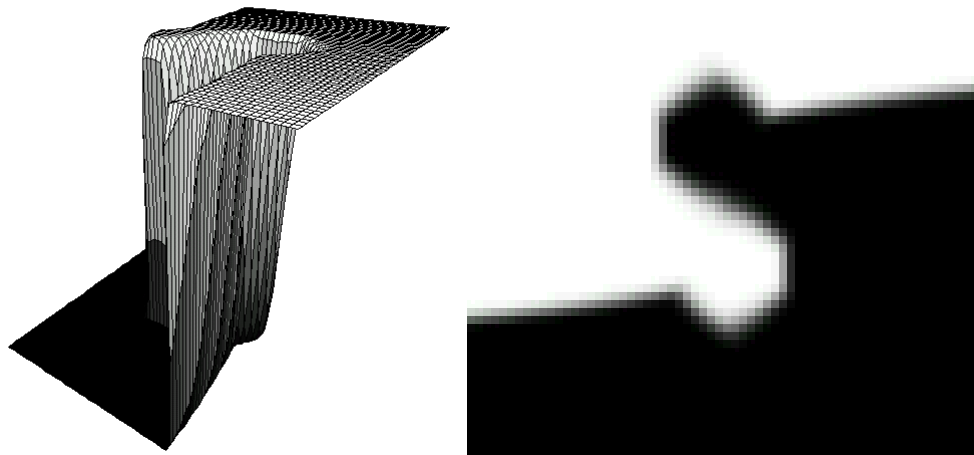


Rys. 7.9. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego.

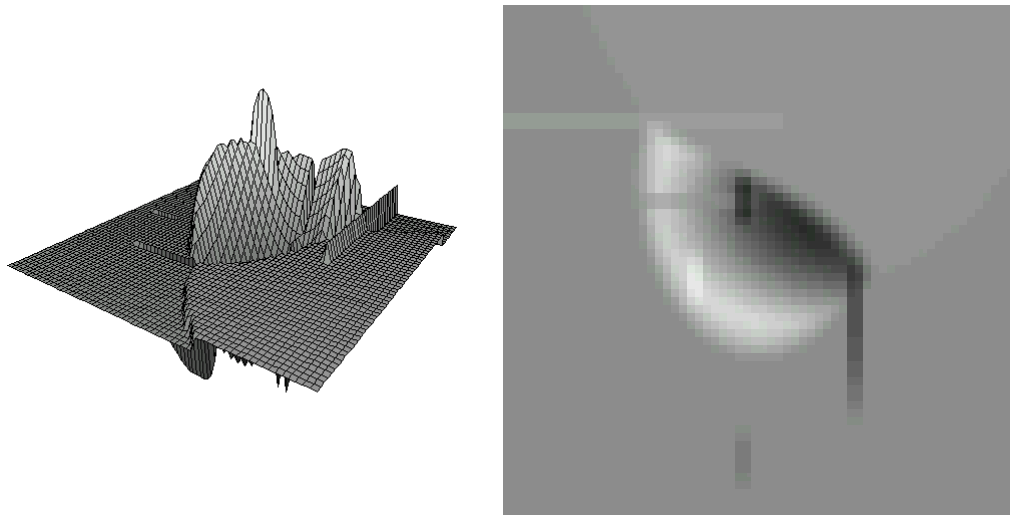


Rys. 7.10. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego po zmianie następników.

W przypadku stałych parametrów $\bar{y}^k$ (rys. 7.11) odpowiedzi systemu rozszerzonego z wnioskowaniem według reguły Larsena są identyczne jak systemu podstawowego (rys. 7.4). Jeżeli natomiast uczeniu podlegały parametry $\bar{y}^k$ system nie mógł znaleźć prawidłowego modelu, czego efektem są całkowicie chaotyczne wyniki widoczne na rysunku 7.12.

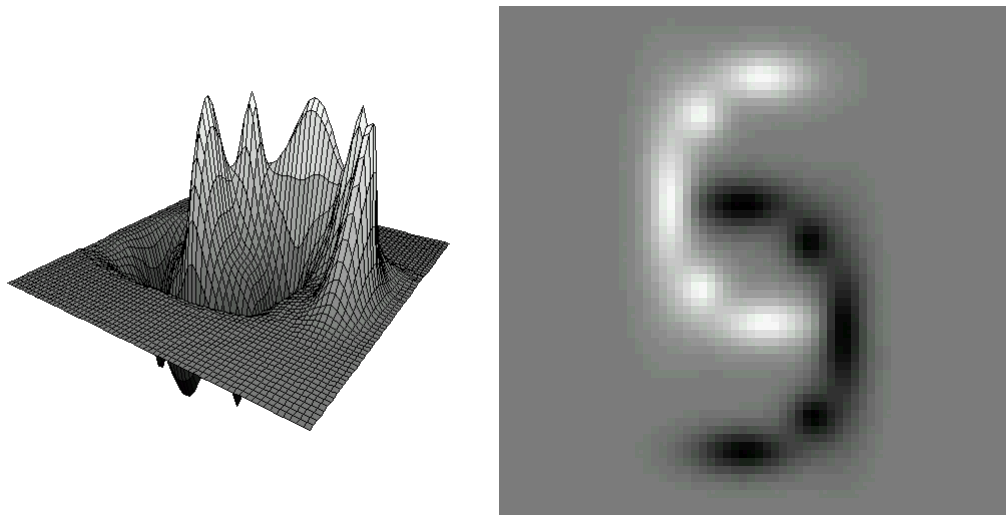


Rys. 7.11. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Larsena.



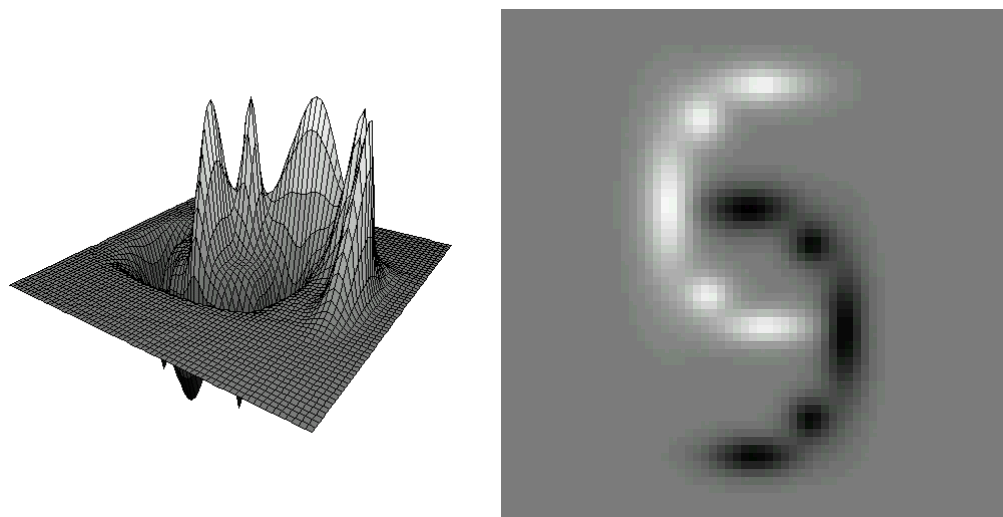
Rys. 7.12. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Larsena po zmianie następników.

Struktura rozszerzona z wnioskowaniem binarnym poprawnie klasyfikuje punkty należące do klas opisanych przez reguły. Zbocza powierzchni wykreślonej na rysunku 7.13 są mało strome, przez co powstają duże powierzchnie, które system nie powinien klasyfikować do żadnej z klas, a otrzymywana wartość jest istotnie różna od 0.



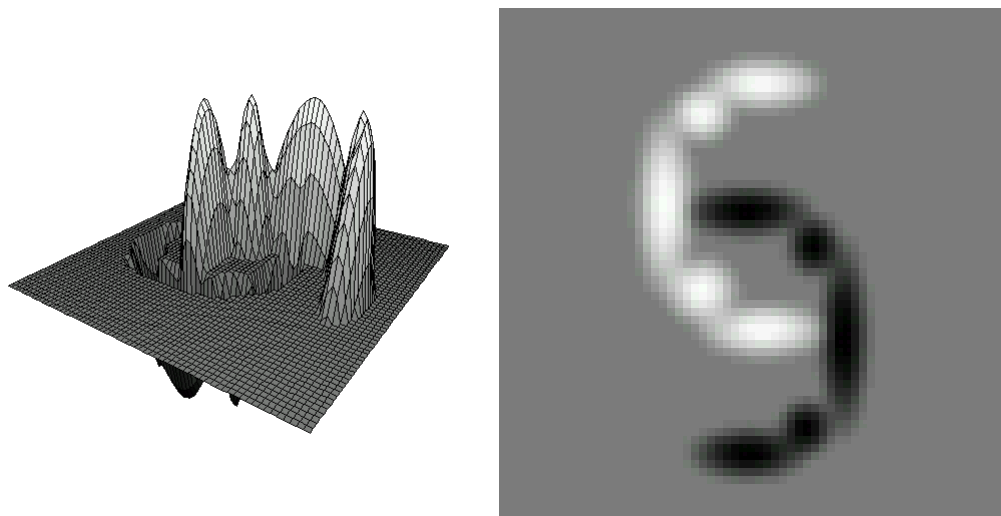
Rys. 7.13. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły binarnej.

Wnioskowanie Łukasiewicza daje podobne rezultaty jak binarne. Widać to po podobnych powierzchniach przedstawionych na rysunkach 7.13 i 7.14.



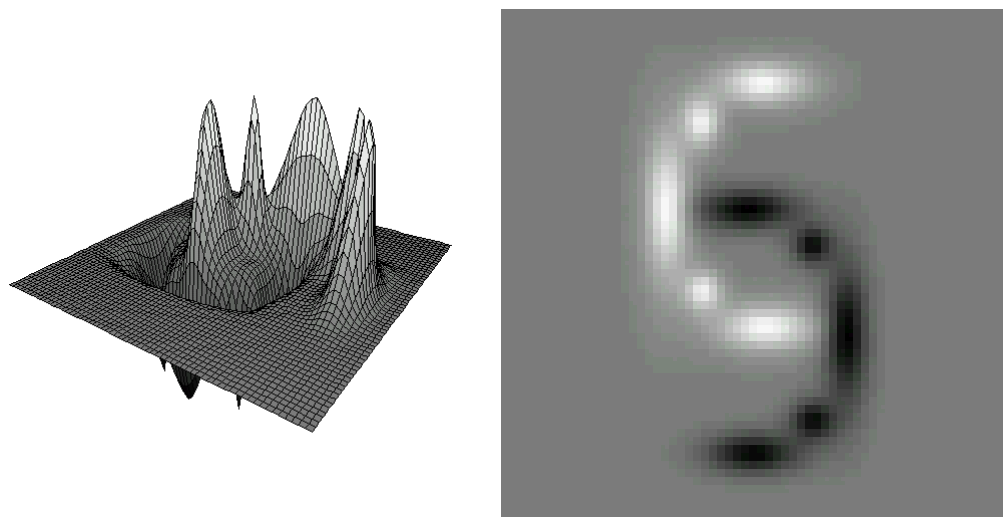
Rys. 7.14. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Łukasiewicza.

Rozszerzona struktura z wnioskowaniem według reguły Zadeha charakteryzuje się wyjątkowo dobrym klasyfikowaniem punktów nie należącym do żadnej ze zdefiniowanych klas. Jednoznaczność klasyfikowania obszarów należących do klas również wyróżnia się na tle pozostałych struktur. Na rysunku 7.15 niemal nie widać odcieni pośrednich, co świadczy o wysokiej jakości klasyfikacji dokonywanej przez tę strukturę.



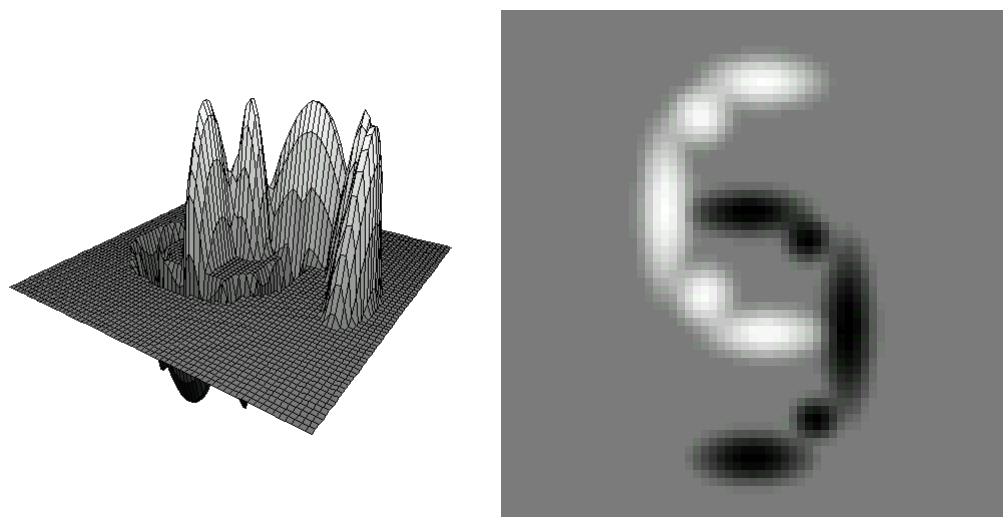
Rys. 7.15. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Zadeha.

Klasyfikacja punktów przeprowadzona przez rozszerzoną strukturę z wnioskowaniem według reguły probabilistycznej (rys. 7.16) jest bardzo podobna do wyników uzyskanych przez struktury rozszerzone z wnioskowaniem binarnym i Łukasiewicza.



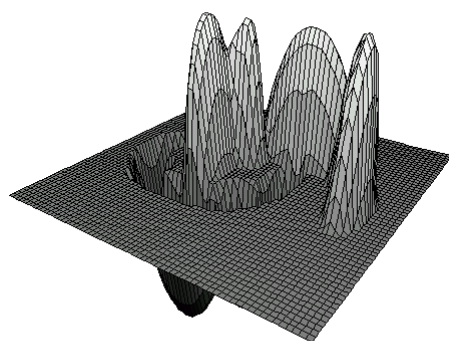
Rys. 7.16. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły probabilistycznej.

Podobnie jak w przypadku wnioskowania Zadeha, także w przypadku Willmotta, na rysunku 7.17 otrzymano płaską powierzchnię punktów na poziomie 0, w której znajdują się obszary należące do zdefiniowanych klas.

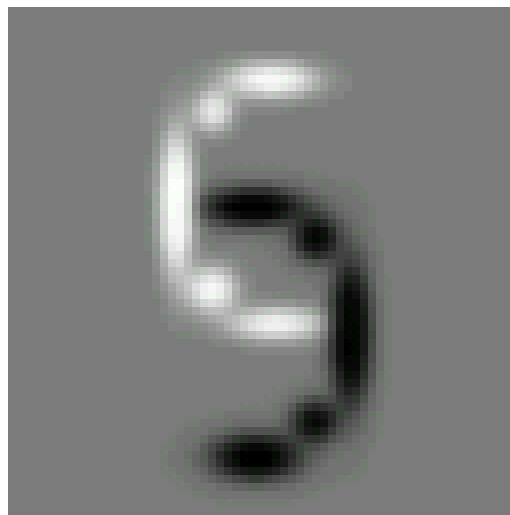
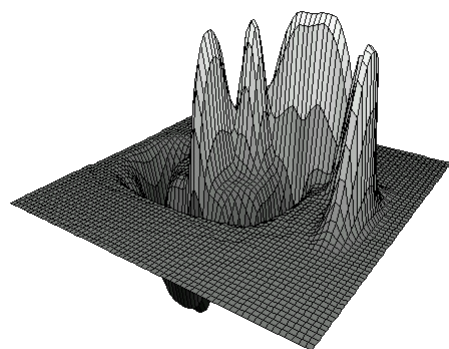


Rys. 7.17. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Willmotta.

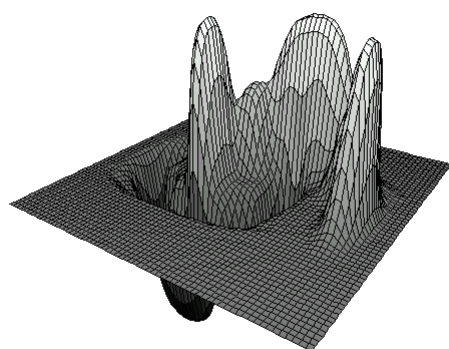
Struktury rozszerzone z wnioskowaniem Goguena, Sharpa i Gödela dają podobne wyniki w procesie klasyfikacji punktów do zdefiniowanych klas. Widać między wykreślonymi siatkami (rys. 7.18, 7.19 i 7.20) pewne różnice, lecz podstawowe cechy są zbliżone. Wszystkie one klasyfikują poprawnie punkty nie należące do żadnej ze zdefiniowanych klas, nie określone przez zaimplementowane reguły. Punkty należące do zdefiniowanych klas również, w większości przypadków identyfikowane są poprawnie.



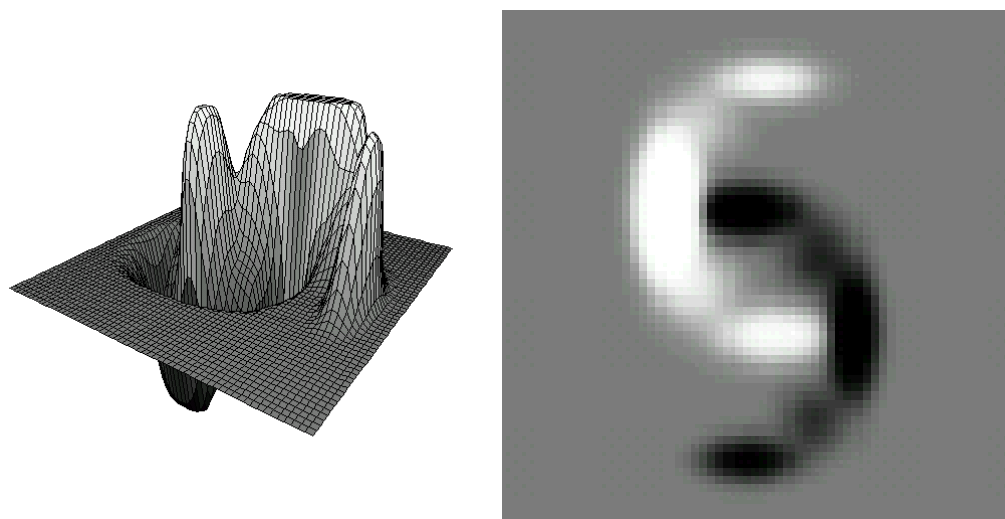
Rys. 7.18. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Goguena.



Rys. 7.19. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Sharpa.



Rys. 7.20. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Gödela.



Rys. 7.21. Siatka uzyskana w trakcie testowania rozszerzonego systemu rozmyto-neuronowego z wnioskowaniem wg reguły Yagera.

7.2 Wspomaganie diagnostyki medycznej

Diagnostyka medyczna jest dziedziną, w której ogólnie rozumiana sztuczna inteligencja stosowana jest z powodzeniem od dłuższego czasu. W dalszym ciągu pracy przedstawione zostaną wyniki zastosowania systemów rozmyto-neuronowych z różnymi metodami wnioskowania do wspomaganie diagnostyki raka szyjki macicy. Diagnoza stawiana w tym przypadku przez lekarza oparta jest na wynikach badań tkanki pacjentki oraz informacji dodatkowych. Dane podawane na wejścia systemów rozmytych to:

- Liczba lat po menopauzie,
- BMI (Body Mass Index) – wskaźnik masy ciała,
- LH (lutropina) – hormon wydzielany przez przysadkę,
- FSH (follitropina) – j.w.,
- PRL (prolaktyna) – j.w.,
- E_1 (estron) – estrogen,
- E_2 (estradiol) – najsilniejszy estrogen,
- Aromatoza – enzym przekształcający inne hormony w estron lub estradiol w tkance nowotworu,
- Receptor estrogenowy.

Na wyjściu systemów oczekiwana jest wartość 1 jeśli diagnoza jest pozytywna lub wartość 0 w przypadku diagnozy negatywnej.

Do eksperymentu wykorzystano dane pochodzące od 65 pacjentek z których u 52 stwierdzono stan chorobowy. Dane te podzielono losowo na ciąg uczący o 54 elementach i

ciąg testujący o 11 elementach, jak w monografii [50] oraz artykule [40]. W wyniku uczenia parametrów zbiorów rozmytych A_i^k oraz redukcji zbędnych zbiorów stworzono systemy składające się z $N = 2$ reguł. Systemy te nie podlegały dalszemu uczeniu. W tabeli 7.1 przedstawiono wyniki testowania wszystkich badanych struktur. Jeśli uznamy wartość wyjściową systemu $\bar{y} > 0,5$ za diagnozę pozytywną, a wartość wyjściową systemu $\bar{y} < 0,5$ za diagnozę negatywną, to wszystkie struktury za wyjątkiem wykorzystujących wnioskowanie typu ograniczona suma działają poprawnie. W tabeli podano również poziomy aktywacji reguł, na podstawie których poszczególne systemy podjęły decyzje.

Tab. 7.1. Wyniki testowania systemów rozmyto-neuronowych.

Poziomy aktywacji reguł											
$\mu_{A^1}(\bar{x})$	0,79	0,72	0,92	0,65	0,59	0,69	0,89	0,73	0,78	0,97	0,48
$\mu_{A^2}(\bar{x})$	0,02	0,04	0,01	0,14	0,13	0,11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,62
Diagnoza											
oczekiwana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Struktury podstawowe											
r. Larsena	1,000	1,000	1,000	0,997	0,997	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000
r.Łukasiewicza	0,824	0,777	0,925	0,710	0,679	0,745	0,904	0,787	0,822	0,973	0,423
r. ogr.sumy	0,021	0,050	0,008	0,176	0,185	0,133	0,000	0,000	0,000	0,001	0,564
r. Sharpa	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000
r. Zadeha	0,790	0,724	0,920	0,648	0,590	0,694	0,894	0,729	0,784	0,972	0,381

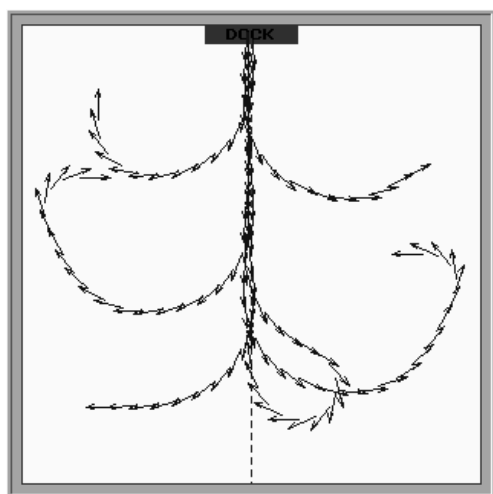
Struktury rozszerzone											
r. binarna	0,728	0,723	0,730	0,701	0,679	0,708	0,731	0,731	0,731	0,731	0,423
r. Gödela	0,677	0,661	0,701	0,639	0,619	0,653	0,697	0,663	0,676	0,707	0,446
r. Goguena	0,682	0,663	0,714	0,638	0,616	0,654	0,708	0,665	0,681	0,725	0,436
r. Larsena	0,731	0,731	0,731	0,731	0,731	0,731	0,731	0,731	0,731	0,731	0,436
r.Łukasiewicza	0,634	0,608	0,691	0,581	0,562	0,598	0,678	0,610	0,631	0,716	0,457
r.Mamdaniego	0,682	0,663	0,714	0,638	0,616	0,654	0,708	0,665	0,681	0,725	0,436
r. ogr.sumy	0,278	0,289	0,273	0,336	0,344	0,322	0,269	0,269	0,269	0,269	0,538
r. Sharpa	0,855	0,824	0,897	0,769	0,734	0,800	0,890	0,830	0,854	0,909	0,395
r. probabil.	0,664	0,643	0,704	0,607	0,593	0,624	0,697	0,650	0,665	0,722	0,466
r. Willmotta	0,580	0,564	0,614	0,564	0,512	0,572	0,606	0,556	0,574	0,626	0,381
r. Yagera	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,097
r. Zadeha	0,682	0,663	0,714	0,638	0,590	0,654	0,708	0,665	0,681	0,725	0,381

7.3 Parkowanie dwuosioowego pojazdu mechanicznego

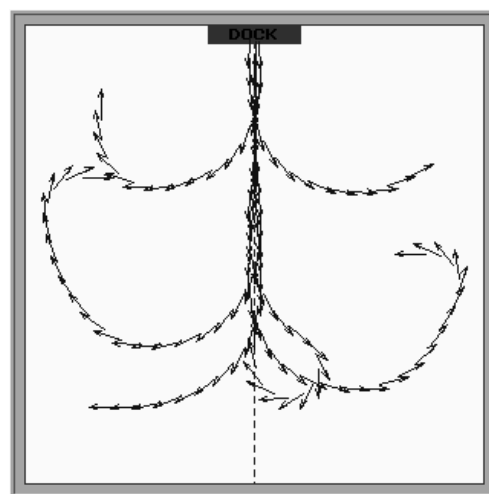
Kolejnym przykładem zastosowania omawianych systemów rozmyto-neuronowych jest sterowanie dwuosioowym pojazdem mechanicznym. Problem ten jest często stosowanym przykładem ilustrującym działanie rozmytych systemów sterujących. Szczegółowy jego opis można znaleźć m.in. w pracach [37], [26], [46] i [49]. Obiektem sterowania jest dwuosioowy pojazd mechaniczny (ciężarówka) znajdujący się na placu o określonych ograniczonych rozmiarach. Na jednym z brzegów placu znajduje się dok, do którego pojazd ma być podstawiony prostopadłe, tyłem. System rozmyty działający w roli sterownika na podstawie położenia pojazdu na placu (odległość od osi doku i kąt względem jej) ustala kąt skrętu kół pojazdu poruszającego się do tyłu ze stałą prędkością.

W przeprowadzonych eksperymentach zastosowano systemy rozmyto-neuronowe o 16 regułach uczone metodą wstecznej propagacji błędów. W każdym z przypadków uczenie rozpoczynano przy identycznych wartościach parametrów. Nauczone struktury zostały przetestowane dla sześciu położenia początkowych pojazdu: $(-100, 50, 180^\circ)$, $(-100, 250, 90^\circ)$, $(0, 200, 180^\circ)$, $(100, 150, 90^\circ)$, $(-100, 100, -90^\circ)$, $(100, 100, -120^\circ)$. Przedstawione niżej rysunki pokazują trajektorie ruchu, gdy rolę sterownika pełniły kolejne systemy rozmyto-neuronowe. Strzałki przedstawiają położenia pojazdu w kolejnych chwilach czasowych. Grot strzałki pokazuje przód pojazdu.

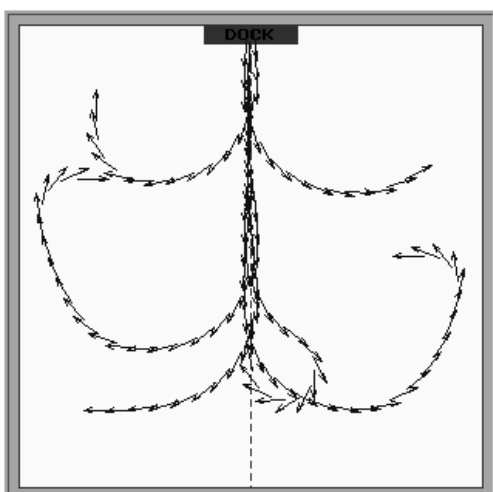
Tradycyjnie w roli sterownika używane były dotychczas ([37], [26], [46], [49], [51], [53]) systemy z wnioskowaniem według reguł Mamdaniego lub Larsena. Z przeprowadzonych badań, których ilustracją są rysunki od 7.22 do 7.35 wynika, że jest to najlepsze rozwiązanie. Jakość sterowania uzyskana przy wykorzystaniu pozostałych systemów rozmyto-neuronowych nie była wyższa, a w przypadku systemów z wnioskowaniem Goguena (podstawowego i rozszerzonego) nie udało się uzyskać pozytywnych wyników. Również podstawowa struktura z wnioskowaniem według reguły ograniczonej sumy nie działała poprawnie, co jest jednak zgodne z rozważaniami prowadzonymi na temat tej reguły w rozdziale 6.



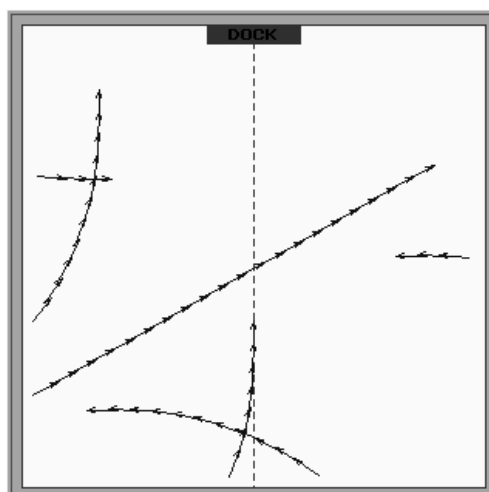
Rys. 7.22. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego lub Larsena.



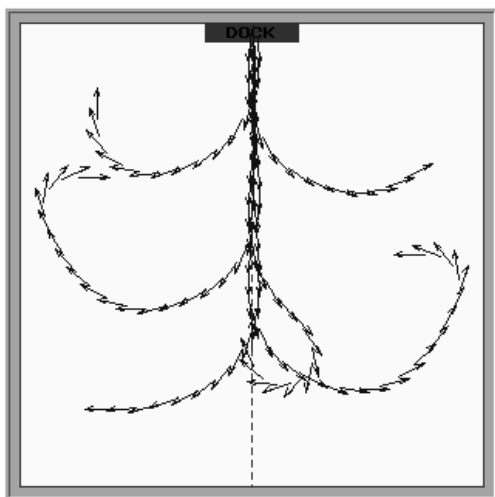
Rys. 7.23. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły binarnej, Łukasiewicza.



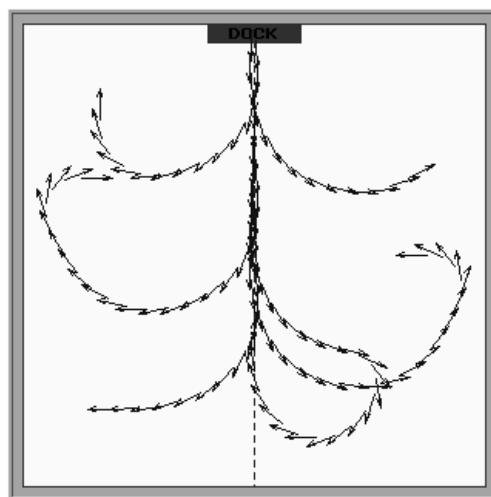
Rys. 7.24. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Zadeha lub Willmotta.



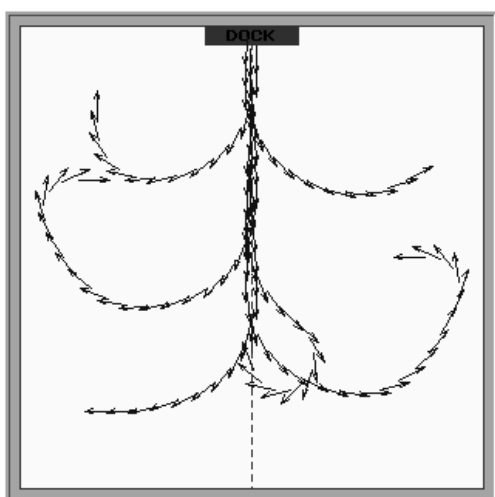
Rys. 7.25. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy.



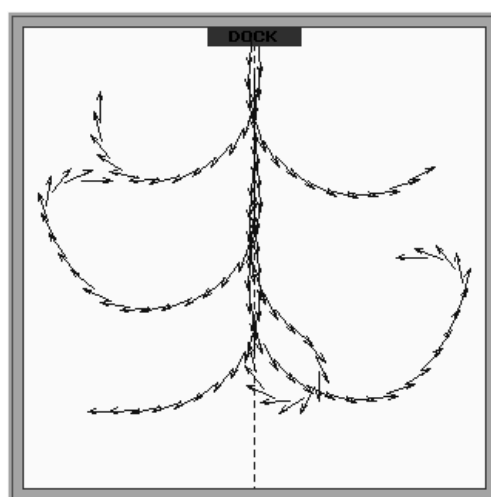
Rys. 7.26. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Mamdaniego.



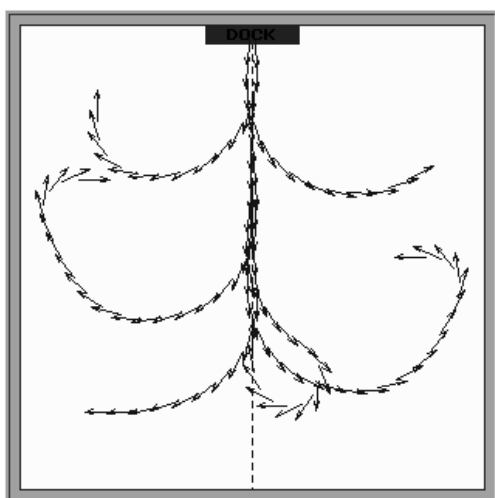
Rys. 7.27. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Larsena.



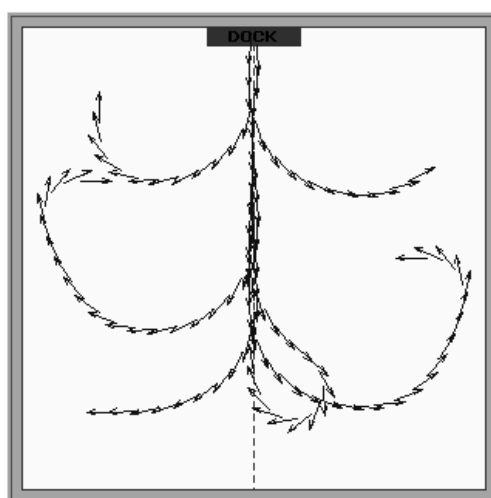
Rys. 7.28. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły binarnej.



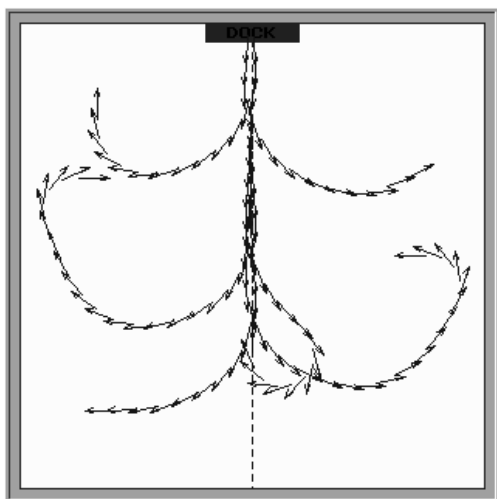
Rys. 7.29. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Łukasiewicza.



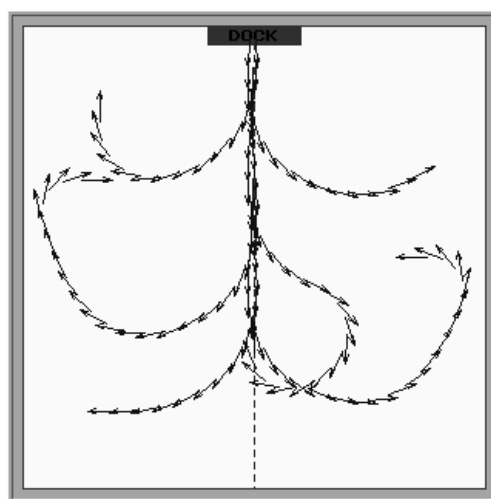
Rys. 7.30. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Zadeha.



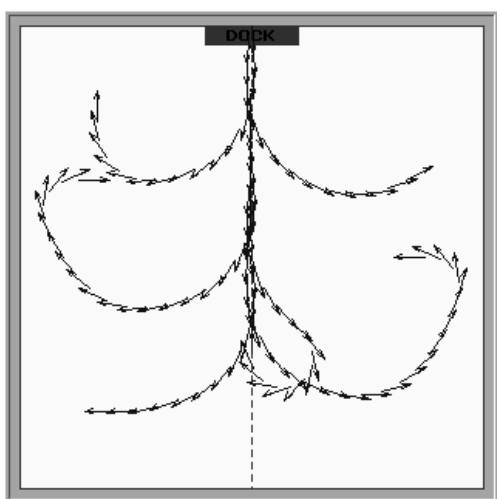
Rys. 7.31. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły probabilistycznej.



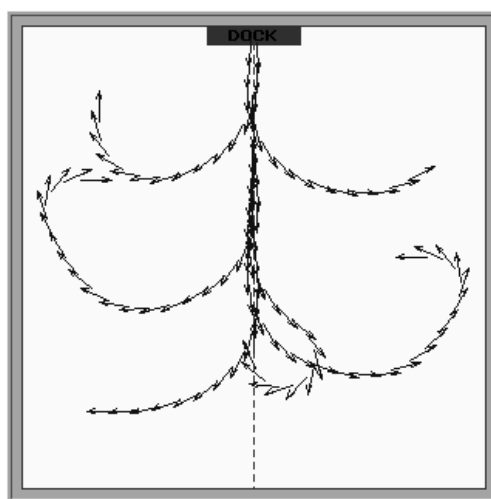
Rys. 7.32. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Willmotta.



Rys. 7.33. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły ograniczonej sumy.



Rys. 7.34. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Sharpa.



Rys. 7.35. Trajektoria ruchu pojazdu sterowanego przez rozszerzony system rozmyto-neuronowy z wnioskowaniem wg reguły Gödela.

8 PODSUMOWANIE

W pracy postawiono cel skonstruowania i porównania systemów rozmyto-neuronowych z wykorzystaniem różnych metod rozmytego wnioskowania. Cel i tezę pracy przedstawiono w **rozdziale 1**.

Najważniejsze osiągnięcia uzyskane w pracy to:

- Wyprowadzenie nie prezentowanych dotychczas wzorów opisujących uproszczone wnioskowanie rozmyte dla różnych reguł rozmytej implikacji (destrukcyjnych modeli lingwistycznych).
- Skonstruowanie nowych struktur (architektur) systemów rozmyto-neuronowych wykorzystujących różne reguły rozmytego wnioskowania.
- Wyprowadzenie wzorów opisujących uproszczone rozmyte wnioskowanie uwzględniające pewne cechy funkcji przynależności zbiorów rozmytych zawartych w następnikach reguł w sposób dotychczas nieznany.
- Skonstruowanie systemów rozmyto-neuronowych uwzględniających kształt zbiorów rozmytych zawartych w następnikach reguł.
- Zastosowanie różnego rodzaju modyfikacji do stworzonych uprzednio nowych systemów.
- Określenie sposobu realizacji systemów rozmyto-neuronowych z rozmywaniem typu *non-singleton* wykorzystujących różne reguły rozmytego wnioskowania.
- Porównanie uzyskanych systemów rozmyto-neuronowych.

W **rozdziale 2** przedstawiono skrótowo podstawowe informacje na temat rozmytych systemów wnioskujących. Pojęcie zbioru rozmytego zdefiniowano dla przypadku ogólnego, a następnie omówiono wybrane przypadki szczególne, w tym jednowymiarowe zbiory rozmyte i stosowane powszechnie ich funkcje przynależności. Przetoczono również przykłady zbiorów rozmytych opisanych w wielowymiarowej przestrzeni zmiennych rzeczywistych. W punkcie 2.3 przedstawiono i zilustrowano wykresami różne metody przybliżonego wnioskowania.

W **rozdziale 3** wyprowadzono wzory opisujące systemy rozmyto-neuronowe wykorzystujące przedstawione wcześniej metody przybliżonego wnioskowania. Na ich podstawie skonstruowano odpowiednie struktury rozmyto-neuronowe. Zaproponowane architektury oraz opisujące je wzory opracowano w dwóch wersjach. W punktach 3.2 i 3.3 przyjęto założenie upraszczające, o nie pokrywaniu się poszczególnych zbiorów B^k wykorzystywanych w następnikach reguł. Założenie to doprowadziło do znanej struktury

opartej o metodę wnioskowania Mamdaniego lub Larsena oraz do czterech nowych architektur sieci. Pierwszej, wspólnej dla wnioskowania binarnego, Łukasiewicza i probabilistycznego, drugiej dla reguły Zadeha i Willmotta, trzeciej dla wnioskowania według reguł Goguena, Sharpa, Gödela i Yagera oraz czwartej dla metody ograniczonej sumy. W punkcie 3.4 zrezygnowano z zastosowanego wcześniej założenia upraszczającego, uzyskując dwanaście nowych struktur, które w przeciwieństwie do poprzednich uwzględniają pewne cechy kształtu zbiorów rozmytych B^k . Rozważania zawarte w punktach 3.2, 3.3 i 3.4 zostały przeprowadzone dla zbiorów rozmytych A^k w postaci ogólnej, natomiast w punkcie 3.5. przedstawiono wybrane architektury dla przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych.

Rozdział 4 zawiera modyfikacje systemów opracowanych w rozdziale 3. Do struktur tych zastosowano znane już wcześniej [49], [50], [51] modyfikacje dotyczące uproszczenia grupy zbiorów rozmytych A^k w przypadku niezależnych zmiennych lingwistycznych, pokazano sposób implementacji w postaci struktur rozmyto-neuronowych reguł rozbudowanych za pomocą spójników **I** lub **LUB**, jak i niepełnych. Przedstawiono także przykłady zastosowania sieci neuronowej w strukturze systemu rozmyto-neuronowego. W punkcie 4.5 przeprowadzone zostały rozważania na temat rozmywania typu *non-singleton*. Wynika z nich, że dla omawianych systemów rozmyto-neuronowych możliwe jest sprowadzenie systemu z rozmywaniem typu *non-singleton* do struktury z rozmywaniem typu *singleton*, jedynie poprzez odpowiedni dobór funkcji przynależności zbiorów rozmytych A^k .

Rozdział 5 dotyczy problemu ustalania parametrów omawianych struktur. Omówiono wybrane metody, takie jak algorytmy genetyczne, grupowanie danych i wsteczną propagację błędów. Dla tej ostatniej wyprowadzono wzory opisujące propagację błędów za pomocą elementów stosowanych do budowy omawianych struktur.

Systemy uzyskane w rozdziale 3 poddano analizie w **rozdziale 6**. Dla każdej architektury sieci przedstawiono wykresy sygnałów podawanych na warstwy realizujące wyostrzanie, w funkcji wartości wejściowej $\bar{x}$, dla kilku specyficznych przypadków. Na podstawie tych wykresów wyciągnięto wnioski o cechach charakterystycznych poszczególnych struktur.

Analizy te zostały uzupełnione przykładami zastosowań uzyskanych systemów, przedstawionymi w **rozdziale 7**. Wykorzystano je do rozwiązania problemu klasyfikacji, wspomagania diagnostyki medycznej oraz sterowania.

W oparciu o przeprowadzone analizy i doświadczenia można stwierdzić, że zaproponowane w pracy systemy rozmyto-neuronowe charakteryzują się ciekawymi właściwościami, przydatnymi w wybranych zastosowaniach. W szczególności w pewnych

problemach klasyfikacji niektóre nowe struktury wykazują swą wyższość nad systemami znanymi dotychczas. Realizują one postawione zadanie nie gorzej przy mniejszej ilości zdefiniowanych reguł, a zatem mniejszej ilości parametrów. Nie zauważono jednak korzyści w zastosowaniu systemów destrukcyjnych w sterowaniu. W dziedzinie tej równie dobrze działają dotychczas znane systemy konstruktywne. Ponadto wykazano, że reguła ograniczonej sumy w postaci (2.94) nie sprawdza się jako metoda realizacji rozmytej implikacji.

LITERATURA

- [1] S. Abe, R. Thawonmas, A Fuzzy Classifier with Ellipsoidal Regions, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 5, pp. 358-368, August 1997.
- [2] S. Abe, Dynamic Cluster Generation for A fuzzy Classifier with Ellipsoidal Regions, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 28, no. 6, pp. 869-875, December 1998.
- [3] S. Abe, A Fuzzy Classifier with Ellipsoidal Regions for Diagnosis Problems, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 29, no. 1, pp. 140-149, February 1999.
- [4] J. C. Bezdek, *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*, New York, Plenum Press, 1981.
- [5] J. C. Bezdek, N. R. Pal, Two soft relatives of learning vector quantization, *Neural Networks*, Vol. 8, No. 5, 1995, pp. 729-743.
- [6] J. Bilski, *Szybkie algorytmy uczenia sieci neuronowych*, praca doktorska, AGH, Kraków 1995.
- [7] J. Bilski, R. Nowicki, R. Scherer, S. Litwiński, Application of signal processor TMS320C30 to neural networks realisation, *Proceedings of the Second Conference Neural Network and Their Application*, Szczyrk 1996, pp. 53-59.
- [8] M. S. Chen, S. W. Wang, Fuzzy clustering for parameter identification of fuzzy membership functions, *Proc. of IZUKA'96*, 1996, pp. 287-290.
- [9] E. Czogała, W. Pedrycz, *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, PWN, Warszawa 1985.
- [10] E. Czogała, J. Łęski, On destructive fuzzy logic controllers, *5-th Zittau Fuzzy Colloquium*, 1997, pp. 8-12.
- [11] D. Driankov, H. Hellendoorn, M. Reinfrank, *Wprowadzenie do sterowania rozmytego*, WNT, Warszawa 1996. (oryg. *An Introduction to Fuzzy Control*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993.)
- [12] D. Filev, R. R. Yager, Simplified Methods of Reasoning in Fuzzy Models, *Proc. of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Yokohama, Japan, March 20-24, 1995, pp. 123-129.
- [13] C. Frélicot, A Rejection-Based Possibilistic Classifier and Its Parameters Learning, *Proceedings of FUZZ-IEEE'98*, pp. 1423-1428, USA 1998.

- [14] D. E. Goldberg, *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*, WNT, Warszawa 1995. (oryg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1989.)
- [15] J. H. Holland, J. S. Reitman, Cognitive systems based on adaptive algorithms, *Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach*, Los Altos, CA: Morgan Kaufman, 1983.
- [16] H. Ishibuchi, M. Nii, Fuzzification of Input Vectors for Improving the Generalization Ability of Neural Networks, *Proceedings of FUZZ-IEEE'98*, pp. 1153-1158, USA 1998.
- [17] H. Ishibuchi, T. Nakashima, Fuzzy Classification with Reject Options by Fuzzy If-Then Rules, *Proceedings of FUZZ-IEEE'98*, pp. 1452-1457, USA 1998.
- [18] R. Jager, *Fuzzy Logic in Control*, CIP-DATA Koninklijke Bilbliothek, Den Haag 1995.
- [19] M. Jamshidi, N. Vadiie, T. J. Ross, *Fuzzy Logic and Control Software and Hardware Applications*, PTR Prentice Hall, 1993.
- [20] J. Kacprzyk, *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, PWN, Warszawa 1986.
- [21] T. Kacprzyk, K. Ślot, *Sieci neuronowe komórkowe*, PWN, Warszawa-Łódź 1994.
- [22] N. B. Karayiannis, A. N. Venetsanopoulos, *Artificial Neural Networks*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [23] N. B. Karayiannis, Learning Algorithms for Reformulated Radial Basis Neural Networks, *Proceedings of IJCNN'98*, pp. 2230-2235, USA 1998.
- [24] J. Keller, H. Tahani, Implementation of Conjunctive and Disjunctive Fuzzy Logic Rules With Neural Networks, *Int'l. J. Approximate Reasoning*, vol. 6, pp. 221-240, Elsevier Science Publishing Company, Inc. 1992.
- [25] J. Kluska, *Sterowanie z logiką rozmytą*, Zeszyty Nauk. Politechniki Rzeszowskiej, Seria Elektrotechnika, Zeszyt 12, Nr 104, Rzeszów 1992.
- [26] S. G. Kong, B. Kosko, Comparison of fuzzy and neural truck backer upper control system, *Proc. IJCNN-90*, vol. 3, pp. 349-358, June 1990.
- [27] J. Korbicz, A. Obuchowicz, D. Uciński, *Sztuczne sieci neuronowe. Podstawy i zastosowania*, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1994.
- [28] W. Kosiński, M. Weigl, General mapping approximation problems solving by neural and fuzzy inference networks, *SAMS*, Vol. 30, pp. 11-28, 1998.
- [29] R. Kruse, J. Gebhardt, F. Klawon, *Foundations of Fuzzy Systems*, John Willey & Sons, 1994.

- [30] K.-M. Lee, D.-H. Kwang, A fuzzy neural network model for fuzzy inference and rule tuning, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 1994, vol. 2, no. 3, pp. 265-277.
- [31] C.-T. Lin, G. C. S. Lee, Neural-network-based fuzzy logic control and decision system, *IEEE Transactions on Computers*, December 1991, vol. 40, no. 12, pp. 1320-1336.
- [32] C.-T. Lin, G. C. S. Lee, Real-time supervised structure/parameter learning for fuzzy neural networks, *Proc. IEEE Int. Conf. Fuzzy Syst.*, San Diego, CA, March 1992, pp. 1283-1290.
- [33] C.-T. Lin, G. C. S. Lee, Supervised and unsupervised learning with fuzzy similarity for neural network-based fuzzy logic control systems, *Fuzzy Sets, Neural Networks and Soft Computing*, R. R. Yager, L. A. Zadeh (red.), Van Nostrand Reinhold, New York 1994, p. 85–125.
- [34] C.-T. Lin, G. C. S. Lee, Reinforcement structure/parameter learning for neural-network-based fuzzy logic control systems, *IEEE Transactions on Computers*, February 1994, vol. 2, no. 1, pp. 46–63.
- [35] Z. Michalewicz, *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, WNT, Warszawa 1996. (oryg. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer-Verlag, 1996.)
- [36] G. C. Mouzouris, J. M. Mendel, Nonsingleton Fuzzy Logic Systems: Theory and Application, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 56-71, February 1997.
- [37] D. Nguyen, B. Widrow, The truck backer-upper: An example of self-learning in neural network, *IEEE Contr. Syst. Mag.*, vol. 10, no. 3, pp. 18-23, 1990.
- [38] R. Nowicki, *Program FLiNN-GA – Podręcznik użytkownika. Suplement.*, Polskie Towarzystwo Sieci Neuronowych, Częstochowa 1996.
- [39] R. Nowicki, D. Rutkowska, Fuzzy inference neural networks based on destructive and constructive approaches and their application to classification, *Proceedings of Fourth Conference Neural Network and Their Application*, Zakopane 1999, pp. 294-301.
- [40] R. Nowicki, Systemy rozmyto-neuronowe w diagnostyce medycznej, *Materiały z XI krajowej konferencji naukowej Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna*, Warszawa, grudzień 1999, s. 883–887.
- [41] S. Osowski, *Sieci neuronowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1994.

- [42] S. Osowski, *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym*, WNT, Warszawa 1996.
- [43] K. Pal, N. R. Pal, A flexible fuzzy controller with relative importance of rules, *Proceedings of IIZUKA '96*, pp. 398-401.
- [44] A. Piegat, *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1998.
- [45] M. Piliński, *Program FLiNN – Podręcznik użytkownika*, Polskie Towarzystwo Sieci Neuronowych, Częstochowa 1996.
- [46] M. Piliński, *Metodologia automatycznego uczenia sterowników rozmytych z wykorzystaniem sieci neuronowych*, praca doktorska, Częstochowa 1997.
- [47] G. Qiu, M. R. Varley, T. J. Terrell, Accelerated training of backpropagation networks by using adaptive momentum step, *Electronics Letters*, Vol. 28, No. 4, pp. 377-379.
- [48] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, R. J. Williams, Learning Internal Representation by Error Propagation, *Parallel Distributed Processing*, vol. 1, Cambridge, M.I.T., 1986.
- [49] D. Rutkowska, M. Piliński, L. Rutkowski, *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, PWN, Warszawa 1997.
- [50] D. Rutkowska, *Inteligentne systemy obliczeniowe. Algorytmy genetyczne i sieci neuronowe w systemach rozmytych*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1997.
- [51] D. Rutkowska, L. Rutkowski, R. Nowicki, Fuzzy Neural Networks with Nonparametric Defuzzification, *Proceedings of the 9th International Symposium, System Modelling control*, April 27-May 1, Zakopane 1998.
- [52] D. Rutkowska, L. Rutkowski, R. Nowicki, On processing of noisy data by fuzzy inference neural networks, *Proceedings of the IASTED International Conference, Signal and Image Processing*, Nassau, Bahamas 1999, pp. 314-318.
- [53] D. Rutkowska, R. Nowicki, L. Rutkowski, Singleton and Non-Singleton Fuzzy Systems with Nonparametric Defuzzification, *Computational Intelligence and Application*, Springer-Verlag 1999, pp. 292-301.
- [54] D. Rutkowska, R. Nowicki, Constructive and destructive approach to neuro-fuzzy systems, *Proc. EUROFUSE-SIC'99*, Budapest 1999, pp. 100-105.
- [55] D. Rutkowska, R. Nowicki, L. Rutkowski, Neuro-Fuzzy System with Inference Process Based on Zadeh Implication, *Proceedings of the Third International Conference on Parallel Processing & Applied Mathematics*, Kazimierz 1999, pp. 597-602.

- [56] D. Rutkowska, A. Starczewski, Two-stage clustering algorithm, *Proceedings of Fourth Conference Neural Network and Their Application*, Zakopane 1999, pp. 220-225.
- [57] D. Rutkowska, A. Starczewski, R. Nowicki, Neuro-fuzzy system based on RBFN defuzzifier and clustering algorithm, *Proceedings of Fourth Conference Neural Network and Their Application*, Zakopane 1999, pp. 302-307.
- [58] D. Rutkowska, A. Starczewski, Neuro-fuzzy system with clustering algorithm in application to medical diagnosis, *Proceedings of Fourth Conference Neural Network and Their Application*, Zakopane 1999, pp. 533-538.
- [59] S. F. Smith, *A learning system based on genetic adaptive algorithm*, PhD thesis, University of Pittsburg, 1980.
- [60] P. Stęclik, D. Rutkowska, A new approach to fuzzy rules generating by genetic algorithm, *Proceedings of Fourth Conference Neural Network and Their Application*, Zakopane 1999, pp. 314-319.
- [61] R. Tadeusiewicz, *Sieci neuronowe*, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1993.
- [62] L. X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, PTR Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1994.
- [63] R. Wantoch-Rekowski, Using RBF neural network for wheeled vehicle classification on the base of ground vibration, *Proceedings of Fourth Conference Neural Network and Their Application*, Zakopane 1999, pp. 722-727.
- [64] W. Wei, J. M. Mendel, A Fuzzy Classifier That Uses Both Crisp Samples and Linguistic Knowledge, *Proc. of IEEE Conference on Fuzzy Systems*, Orlando, Florida, June 1994.
- [65] M. Weigl, *Sieci neuronowe i rozmyte systemy wnioskujące w problemach aproksymacji*, praca doktorska, Warszawa 1995.
- [66] R. R. Yager, D. P. Filev, *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*, WNT, Warszawa 1995. (oryg. *Essentials of fuzzy modelling and control*, John Wiley & Sons, 1994.)
- [67] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 1965, vol. 8, pp. 338-353.
- [68] L. A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts 1-3, *Inf. Sci.*, No. 8, pp. 199-249; No. 8, pp. 301-357; No. 9, pp. 43-80, 1975.

-
- [69] J. Żurada, *Introduction to Artificial Neural Network Systems*, West Publishing Company, Boston 1997.
- [70] *Guidelines for Evolutionary Fuzzy Modelling*, Flexible Intelligence Group, L.L.C., Tuscaloosa, 1997.